NOUVELLES LEÇONS SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS.

LEÇONS

SUR LES

FONCTIONS MÉROMORPHES

PROFESSÉES AU COLLÈGE DE FRANCE

PAR

ÉMILE BOREL.

RECUEILLIES ET RÉDIGÉES

PAR

LUDOVIC ZORETTI.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1903

LEÇONS

SUR LES

FONCTIONS MÉROMORPHES.

DU MÊME AUTEUR.

Leçons sur la théorie des fonctions (*Éléments de la théorie des ensembles et applications*). Paris, Gauthier-Villars et fils, 1898................ 3 fr. 50

Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions. — **Leçons sur les fonctions entières.** Paris, Gauthier-Villars, 1900............................ 3 fr. 50

Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions. — **Leçons sur les séries divergentes.** Paris, Gauthier-Villars, 1901............................ 4 fr. 50

Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions. — **Leçons sur les séries à termes positifs,** professées au Collège de France et rédigées par Robert d'Adhémar. Paris, Gauthier-Villars, 1902............................ 3 fr. 50

EN PRÉPARATION.

Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions. — **Leçons sur les séries de polynomes.**

NOUVELLES LEÇONS SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS.

LEÇONS

SUR LES

FONCTIONS MÉROMORPHES

PROFESSÉES AU COLLÈGE DE FRANCE

PAR

ÉMILE BOREL.

RECUEILLIES ET RÉDIGÉES

PAR

LUDOVIC ZORETTI.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1903

PRÉFACE.

Ce petit Livre a été rédigé par M. Ludovic Zoretti, d'après vingt leçons que j'ai faites au Collège de France en 1901-1902 [1]. La théorie des fonctions méromorphes, qui faisait l'objet de mon enseignement, est étroitement liée avec la théorie des fonctions entières, sur laquelle j'ai déjà publié des *Leçons*. J'ai tâché cependant, comme toujours dans mes leçons et mes petits Livres, de constituer un tout indépendant, n'exigeant pour être compris que les connaissances générales d'Analyse et de Théorie des fonctions analytiques qui se trouvent dans tous les Cours. J'ai dû toutefois, pour éviter les redites, me contenter, dans quelques cas, d'énoncer seulement les résultats, renvoyant, pour la démonstration, à mes *Leçons sur les fonctions entières*.

La théorie générale des fonctions entières et des fonctions méromorphes s'est beaucoup développée dans ces dernières années; la découverte, par M. Paul Painlevé, de fonctions nouvelles, définies par des équations différentielles simples, a contribué puissamment à en augmenter l'intérêt, en ouvrant un champ étendu d'applications importantes. Un autre champ d'applications, presque complètement inexploré, est l'étude des fonctions méromorphes que

[1] Cours institué par la fondation Claude-Antoine Peccot.

l'on obtient en considérant les solutions des équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique comme fonctions de certaines constantes figurant dans les équations.

Parmi les travaux publiés depuis l'apparition de mes *Leçons sur les fonctions entières,* on doit citer surtout ceux de MM. Pierre Boutroux, Ernst Lindelöf et Edmond Maillet; j'en ai indiqué les principaux résultats, consacrant des Notes aux Mémoires qui n'ont paru qu'après la fin du Cours.

On me permettra sans doute d'exprimer le vœu de voir ce nouveau petit Livre être aussi l'origine ou l'occasion de nombreuses recherches; il reste encore beaucoup de progrès à accomplir dans la théorie.

Enfin, je tiens à remercier M. Ludovic Zoretti de la rapidité et du soin avec lesquels il a accompli la tâche qu'il avait assumée, et à me féliciter de la distinction avec laquelle il s'en est acquitté.

Paris, le 4 décembre 1902.

INDEX.

LEÇONS

SUR LES

FONCTIONS MÉROMORPHES.

CHAPITRE I.

LE THÉORÈME DE M. MITTAG-LEFFLER.

I. — *Généralités sur les fonctions analytiques.*

Nous rappellerons d'abord les principales propriétés des fonctions analytiques et de leurs singularités.

Étant donnée une expression de la forme

$$P(x, y) + i\,Q(x, y),$$

où P et Q sont deux fonctions uniformes de x et de y, on dit que c'est une fonction de la variable complexe $z = x + iy$. Si l'on pose

$$f(z) = P(x, y) + i\,Q(x, y),$$

on dit que cette fonction est *analytique* dans un domaine si l'expression

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

où z est une constante et h une variable ayant pour limite zéro, tend, quel que soit z dans ce domaine, vers une limite indépendante du chemin décrit par le point $z + h$ pour venir se confondre avec le point z.

Cauchy a démontré que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que P et Q admettent, par rapport à x et y, des dérivées premières continues vérifiant les deux conditions

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

L'hypothèse de la continuité des dérivées premières est inutile, comme l'a montré M. Goursat ([1]). Leur existence suffit pour que la fonction soit analytique. Les fonctions P et Q sont toutes deux *harmoniques,* c'est-à-dire vérifient l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

Une fonction analytique uniforme est dite *holomorphe* dans un certain domaine si, en chacun des points de ce domaine, elle est pourvue d'une dérivée continue. Étant donné un chemin AMB entièrement situé dans un domaine où la fonction $f(z)$ est holomorphe, on définit l'intégrale

$$\int_{AMB} f(z)\,dz$$

comme la somme de deux intégrales curvilignes

$$\int_{AMB} (P + iQ)(dx + i\,dy) = \int_{AMB} P\,dx - Q\,dy + i \int_{AMB} P\,dy + Q\,dx,$$

et l'on démontre que les conditions de Cauchy sont nécessaires et suffisantes pour que cette intégrale ne dépende que des extrémités A et B du contour d'intégration et nullement du chemin suivi. Il en résulte que, si le contour est fermé, l'intégrale est nulle. Enfin l'intégrale

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$$

définit une fonction uniforme de Z : F(Z). Cette fonction est analytique et admet pour dérivée $f(Z)$.

Toute la théorie de Cauchy est dominée par le fait que l'intégrale

$$\int_C f(z)\,dz$$

est nulle si C désigne un contour fermé à l'intérieur duquel la fonction est holomorphe. On en déduit sans peine la formule fondamentale dite *intégrale de Cauchy* donnant la valeur d'une

---

([1]) *American Transactions,* 1900.

fonction à l'intérieur d'un domaine où elle est holomorphe, connaissant la succession de ses valeurs sur le bord. Si x est un point de ce domaine et C le contour qui le limite, on a

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-x}.$$

Remarquons que si x est extérieur à C, le second membre est nul. C'est là un exemple remarquable d'une expression analytique ayant des valeurs différentes suivant la région du plan que l'on considère.

Au sujet de l'intégrale de Cauchy, il n'est pas inutile de faire une remarque. Donnons-nous au hasard une succession de valeurs sur un contour fermé C d'une fonction, $p(s)+iq(s)$, par exemple, en prenant l'arc, s, du contour pour variable indépendante (p et q admettant pour période la longueur totale de ce contour). Si l'on forme l'intégrale

$$J = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{(p+iq)\,dz}{z-x},$$

il ne faudrait pas croire que cette fonction de x prenne sur C la succession de valeurs $p(s)+iq(s)$. En effet, il n'existe pas en général de fonction, holomorphe à l'intérieur de C, prenant sur le contour les valeurs données.

Pour voir qu'il n'existe pas une telle fonction holomorphe, nous remarquerons que les valeurs prises sur C par une fonction holomorphe ne sont pas arbitraires; si l'on désigne par $P(x,y)+iQ(x,y)$ cette fonction, on pourra bien déterminer la fonction harmonique et régulière $P(x,y)$, de manière qu'elle prenne sur C la succession de valeurs $p(s)$; mais alors Q sera déterminée à une constante additive près et, par suite, $q(s)$ ne peut être prise au hasard (1).

De l'intégrale de Cauchy résulte immédiatement le développement en série de Taylor d'une fonction holomorphe dans le voisi-

(1) On peut démontrer que l'intégrale J définit en dedans et en dehors du contour C deux fonctions holomorphes tendant uniformément sur C vers deux unités continues de valeurs, la différence de ces valeurs étant justement

$$p(s)+iq(s).$$

nage d'un point et, par suite, l'existence pour cette fonction de dérivées de tous ordres : Étant donné un cercle de centre z_0 et de rayon R entièrement intérieur au domaine d'holomorphie d'une fonction $f(z)$, on peut former une série

$$A_0 + A_1(z - z_0) + \ldots + A_n(z - z_0)^n + \ldots,$$

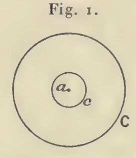
qui, à l'intérieur de ce cercle, converge et représente $f(z)$. De plus, cette série converge absolument et uniformément dans un cercle de centre z_0 et de rayon $R' < R$.

On en déduit aussi le développement plus général de Laurent, sous forme d'une série ordonnée, suivant les puissances positives et négatives de $z - z_0$, développement valable pour tout point situé entre deux cercles concentriques intérieurs au domaine d'holomorphie. De plus, si l'on considère deux cercles concentriques aux premiers et intérieurs à la couronne comprise entre les premiers, la convergence est uniforme entre ces deux cercles.

Si une fonction est holomorphe dans un certain domaine, tout point intérieur à ce domaine sera dit *régulier*. On pourra évidemment de ce point comme centre tracer un cercle entièrement intérieur au domaine d'holomorphie et, par suite, la fonction sera développable en série de Taylor dans ce cercle. Un point régulier est donc caractérisé par le fait d'un tel développement valable en ce point et dans son voisinage. Cette conséquence de la théorie de Cauchy a été prise par Weierstrass comme *définition* des fonctions analytiques.

Tout point non régulier est un point singulier. Un point sin-

Fig. 1.



gulier sera dit *isolé* si, de ce point comme centre, on peut tracer un cercle à l'intérieur duquel il n'y ait pas d'autre point singulier que celui que nous considérons [1]. Soient a un tel point (*fig.* 1)

[1] Dans ce qui suit, nous supposons implicitement les points singuliers isolés.

et C un cercle jouissant de cette propriété. Entourons le point a d'un cercle c de centre a et de rayon infiniment petit. La fonction considérée est holomorphe entre les deux cercles C et c. On peut donc la développer en série de Laurent valable en tout point de cette couronne. Les coefficients de ce développement ne dépendent d'ailleurs pas du rayon de c. Comme ce rayon est pris arbitrairement petit, nous pouvons dire, en somme, que ce développement est valable en tous les points intérieurs à C, sauf au point a. Il peut alors se présenter deux cas qui vont nous conduire à distinguer deux catégories bien différentes de points singuliers.

Si la partie fractionnaire du développement de Laurent comprend un nombre limité de termes, le point a sera dit *pôle de la fonction*. On aura alors, dans le cercle C,

$$f(z) = \frac{B_n}{(z-a)^n} + \frac{B_{n-1}}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + B_0 + A_1(z-a) + \ldots.$$

Le nombre entier n sera dit *l'ordre du pôle a*. Le produit $f(z)(z-a)^n$ est régulier au point a et différent de zéro en ce point. Il en résulte que la fonction $\frac{1}{f(z)}$ peut s'écrire

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{(z-a)^n}{g(z)},$$

$g(z)$ étant régulière et différente de zéro au point a. La fonction $\frac{1}{f(z)}$ n'admet donc plus le point singulier a; a est au contraire un zéro d'ordre n de cette fonction.

Remarquons encore que si z tend vers a, $f(z)$ tend régulièrement vers l'infini, c'est-à-dire que, quel que soit le nombre positif M donné à l'avance, on peut trouver un nombre ρ tel que, sous la condition

$$|z-a| < \rho,$$

on ait

$$|f(z)| > M,$$

Les choses se passent tout à fait différemment lorsque la partie fractionnaire du développement de Laurent est illimitée. On a alors un point singulier *essentiel* de la fonction. Ce point est aussi un point singulier essentiel de la fonction $\frac{1}{f(z)}$. En effet, si

c'était un point régulier de cette fonction, ce serait, soit un pôle, soit un point régulier de $f(z)$; et si c'était un pôle de $\frac{1}{f(z)}$, ce serait un zéro de $f(z)$. Plus généralement, une transformation homographique quelconque effectuée sur $f(z)$ conserve le caractère du point singulier essentiel.

Une deuxième différence entre les pôles et les points essentiels consiste dans la manière dont se comporte la fonction dans le voisinage de ces points. Si l'on considère un cercle de rayon aussi petit qu'on voudra entourant un point essentiel, dans ce cercle, la fonction $f(z)$ se rapproche autant qu'on veut de toute valeur donnée.

Les points essentiels introduisent donc une complication beaucoup plus grande que les pôles, et il est à prévoir que les difficultés que l'on rencontrera dans l'étude des fonctions dépendront beaucoup plus de leurs singularités essentielles que de leurs singularités polaires.

Si nous voulons classer les fonctions au point de vue de leurs singularités, nous placerons donc en première ligne celles qui n'ont aucune singularité ou qui n'ont qu'un nombre fini de pôles. Cherchons quelles sont ces fonctions. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les pôles à distance finie, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ leurs ordres. Le produit

$$\varphi(z) = f(z)(z-a_1)^{\alpha_1}\ldots(z-a_n)^{\alpha_n}$$

n'admet plus d'autre singularité qu'un pôle à l'infini, c'est-à-dire que le quotient $\frac{\varphi(z)}{z^m}$ est fini partout pour une certaine valeur entière de m. Or $\varphi(z)$ est évidemment représentable en série de puissances convergente dans tout le plan :

$$\varphi(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_p z^p + \ldots,$$

et l'on voit immédiatement, en intégrant $\frac{\varphi(z)}{z^{p+1}}$ sur un cercle de centre O et de rayon arbitraire R, que l'on a l'égalité

$$2i\pi a_p = \int_C \frac{\varphi(z)\,dz}{z^{p+1}}.$$

Je dis que, si $p > m$, $a_p = 0$. En effet, il existe une certaine

constante M telle que

$$|\varphi(z)| < MR^m$$

pour $|z| = R$. On a, par suite,

$$|a_p| < \frac{M}{R^{p-m}},$$

quel que soit R, et il s'ensuit bien que $a_p = 0$. Par suite, $\varphi(z)$ se réduit à un polynome et $f(z)$ à une fraction rationnelle. Ce sont donc là les fonctions les plus générales qui n'admettent aucun point essentiel et dont le nombre des pôles est fini.

Insistons un peu sur cette dernière restriction. Le fait de supposer le nombre des pôles infini introduit un élément de complication analogue à celui qu'introduirait l'existence d'un point essentiel. Si nous suivons, en effet, dans ce cas une marche analogue à la précédente, nous serons conduits à introduire une fonction ayant pour zéros les pôles de la première, et ce sera non plus un polynome, mais, comme on le verra à la fin du Chapitre, une fonction à point essentiel.

Nous serons conduits, en second lieu, à considérer des fonctions admettant un seul point essentiel. Si a est ce point essentiel, la transformation homographique

$$\zeta = \frac{1}{z - a},$$

c'est-à-dire

$$z = a + \frac{1}{\zeta},$$

effectuée sur la variable, substitue, à la fonction considérée, une autre fonction ayant un seul point essentiel qui est le point à l'infini. Si la fonction n'a pas d'autre point singulier, nous dirons que c'est une fonction entière [1]. Si elle a, en outre, des pôles à distance finie, nous dirons que c'est une fonction méromorphe.

Le cas où le nombre des pôles est fini est évidemment le plus simple, puisque alors la fonction est le quotient d'une fonction entière par un polynome. Si le nombre des pôles est infini, l'étude

---

[1] Certains auteurs emploient l'expression *transcendante entière* pour éviter la confusion avec les polynomes. En convenant de ne jamais désigner ceux-ci sous le nom de *fonction entière* notre locution n'introduit aucune ambiguïté.

des fonctions méromorphes est un peu moins simple. Comme nous le verrons, la fonction est alors le quotient de deux fonctions entières. Nous pouvons dès lors prévoir, ce que la suite ne fera que confirmer, que l'étude des fonctions méromorphes se rapprochera de celle des fonctions rationnelles, comme l'étude des fonctions entières se rapproche de celle des polynomes.

Avant d'entrer dans l'étude des fonctions méromorphes, nous ferons une remarque qui nous sera souvent utile. Nous pourrons toujours supposer que l'origine des coordonnées n'est pas un pôle de notre fonction. Si l'origine était un pôle, il suffirait de la transporter en un autre point, régulier pour la fonction. Mieux encore, il suffit de retrancher de la fonction la partie principale relative à l'origine; on ne modifie pas ainsi les singularités de la fonction autres que l'origine, qui devient un point régulier.

Pareillement un simple changement d'origine permet de supposer que l'origine n'est pas un zéro de la fonction.

II. — *Le théorème de M. Mittag-Leffler.*

Le premier développement que nous allons donner des fonctions méromorphes est analogue à la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples. Ce développement a l'avantage de mettre en évidence les singularités de la fonction : dans ce but, nous ferons correspondre à chaque pôle un certain groupe de termes caractérisant la manière dont la fonction devient infinie en ce point.

Soit a un pôle d'une fonction analytique uniforme $f(z)$. Au voisinage de ce pôle, le développement de $f(z)$ prend la forme

$$f(z) = \frac{B_n}{(z-a)^n} + \frac{B_{n-1}}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{B_1}{z-a} + A_0 + A_1(z-a) + \ldots$$

ou

$$f(z) = P\left(\frac{1}{z-a}\right) + f_1(z-a),$$

P désignant un polynome et f_1 une série entière. Considérons alors la différence

$$f(z) - P\left(\frac{1}{z-a}\right).$$

Il est manifeste que cette différence admet le point a comme point régulier et que, d'autre part, elle n'admet pas d'autres singularités que celles de la fonction $f(z)$. C'est cette remarque qui va nous conduire au développement cherché.

Examinons d'abord un cas simple, celui où la fonction méromorphe $f(z)$ admet un nombre fini de pôles $a_1, a_2, \ldots, a_k$. A chacun de ces pôles correspond une certaine partie principale

$$P_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right), \quad P_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right), \quad \ldots, \quad P_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right).$$

Si l'on forme la différence

$$\varphi(z) = f(z) - P_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) - P_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) - \ldots - P_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right),$$

cette fonction n'admet plus les pôles $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Elle n'admet donc aucune singularité à distance finie, et par suite c'est une fonction entière. On aura donc pour $f(z)$ le développement suivant :

$$f(z) = \varphi(z) + \sum P\left(\frac{1}{z-a}\right),$$

le signe $\sum$ étant étendu à tous les pôles de $f(z)$ et $\varphi(z)$ étant une fonction entière.

Nous allons obtenir un développement analogue dans le cas où le nombre des pôles est infini. Nous commencerons par faire deux remarques :

1° Dans une région limitée du plan, le nombre des pôles est limité. Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi. Considérons une aire A où nous supposerons le nombre des pôles infini. Entourons-la d'un carré et divisons ce carré en quatre carrés égaux par des parallèles aux côtés. L'aire A est ainsi divisée en quatre aires partielles au plus dans l'une desquelles, au moins, le nombre des pôles est infini. Soit A_1 cette aire. Divisons de même en quatre carrés égaux le carré qui la contient, et ainsi de suite. Nous obtenons ainsi une suite de carrés dont chacun est intérieur au précédent, a un côté deux fois moindre et contient une infinité de pôles. Ces carrés ont donc un point limite α qui est un point de l'aire ou de son contour. Traçons, avec ce point pour centre, un cercle de

rayon arbitrairement petit. Nous pourrons toujours, dans la suite des carrés, en choisir un qui soit intérieur au cercle et il en résulte que ce cercle contient un nombre infini de pôles; α ne saurait donc être un point régulier de la fonction, et d'autre part ce n'est pas non plus un point singulier isolé. Nous tombons donc sur une contradiction.

2° Il suit de là que nous pourrons ranger les pôles par ordre de module croissant. Nous considérerons pour cela une suite de cercles ayant pour centre l'origine et dont les rayons croissent indéfiniment suivant une loi quelconque. Chacune des couronnes comprises entre deux cercles consécutifs contient un nombre fini de pôles qu'il sera alors aisé de ranger par ordre de module croissant. Nous supposerons que cette opération a été faite et nous désignerons par $a_1, a_2, \ldots$ les pôles ainsi rangés; si plusieurs pôles en nombre forcément limité ont le même module, on les rangera dans un ordre quelconque.

Ces remarques faites, nous pourrons facilement généraliser la méthode suivie dans le cas où le nombre des pôles est fini. Nous serions conduits à retrancher de $f(z)$ l'expression $\sum \mathrm{P}\left(\frac{1}{z-a}\right)$ qui est maintenant une série de fractions rationnelles. Mais rien ne prouve que cette série soit convergente. Nous ajouterons donc, à chacun de ces termes, une certaine expression de nature à rendre la série convergente, et telle, d'autre part, qu'il ne s'introduise pas de singularités nouvelles.

Considérons, à cet effet, la fraction rationnelle la plus générale qui admette, en l'un des pôles a_i, le même développement polaire que la fonction $f(z)$. Cette fraction est évidemment

$$\mathrm{R}_i(z) = \mathrm{P}_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right) + \mathrm{Q}_i(z),$$

P_i et Q_i étant deux polynomes. Faisons de même pour chacun des pôles et considérons la différence

$$\varphi(z) = f(z) - \mathrm{R}_1(z) - \mathrm{R}_2(z) - \ldots - \mathrm{R}_i(z) - \ldots.$$

Nous allons démontrer qu'on peut choisir les polynomes Q_i de manière que, en désignant par R'_i la dérivée de R_i, chacune des

séries

$$\sum R_i(z), \quad \sum R'_i(z)$$

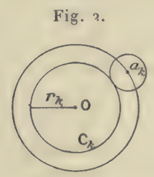
converge uniformément dans toute aire finie, A, ne contenant aucun des pôles a_i. (Pour fixer les idées, on pourra entourer chaque pôle d'un cercle de rayon très petit, on tracera un cercle de rayon très grand ; le domaine de convergence uniforme est alors l'aire intérieure à ce dernier cercle et extérieure aux premiers.) On sait que, dans ces conditions, la série $\sum R_i(z)$ et par suite la fonction $\varphi(z)$ sont analytiques. D'autre part, cette fonction n'a aucune singularité, puisque les seules possibles sont les pôles, et que ceux-ci disparaissent dans la différence ; c'est donc une fonction entière et, en définitive, on a pour $f(z)$ le développement suivant :

$$f(z) = \varphi(z) + \sum R_i(z).$$

Reste à démontrer qu'il est possible de choisir les polynomes $Q_i(z)$ de manière que les séries $\sum R_i(z)$ et $\sum R_i(z)$ convergent uniformément. Il suffit de démontrer la convergence uniforme de la seconde ; il en résulte immédiatement qu'elle est intégrable, terme à terme, et que son intégrale est convergente, si les constantes d'intégration sont convenablement choisies.

Considérons un des pôles a_k (*fig.* 2) et traçons de ce point,

Fig. 2.



comme centre, un cercle de rayon ρ_k assez petit pour que, si l'on trace un cercle ayant pour centre l'origine et tangent extérieurement au premier, le rayon r_k de ce cercle croisse indéfiniment avec $|a_k|$. Soit $P'_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right)$ la partie principale de R'_k relative à ce pôle. On peut dans le cercle C_k de rayon r_k développer

cette fraction rationnelle en une série entière sous la forme

$$c_0^k + c_1^k z + c_2^k z^2 + \ldots,$$

ce développement convergera uniformément à l'intérieur du cercle C_k. Par suite, étant donné à l'avance un nombre ε_k, aussi petit qu'on voudra, on pourra toujours trouver un entier p_k assez grand pour que l'on ait

$$\left| P'_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right) - \sum_{i=0}^{i=p_k} c_i^k z^i \right| < \varepsilon_k \quad (^1).$$

Ce sont ces polynomes

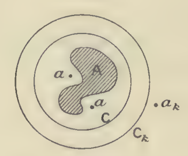
$$\sum c_i^k z^i = - Q'_k(z)$$

que nous introduirons dans nos formules. On aura alors dans toute l'aire intérieure à C_k

$$|R'_k(z)| < \varepsilon_k.$$

Il nous sera alors aisé de montrer que la série $\sum R'_k(z)$ converge uniformément dans une aire A qui ne renferme aucun des pôles.

Fig. 3.



Traçons, en effet, un cercle C (*fig.* 3) ayant pour centre l'origine et renfermant entièrement à son intérieur l'aire A. Soient a_1, a_2, ..., a_h les pôles en nombre fini tels que les cercles C_1, C_2, ..., C_h correspondants soient intérieurs à C; R'_1, R'_2, ..., R'_h les termes de la série qui leur correspondent. Dans l'aire A, qui ne contient

(1) L'uniformité de la convergence suppose que l'entier p_k étant ainsi choisi, l'inégalité subsiste pour les valeurs plus grandes. Pour le raisonnement actuel, cela est inutile; il suffit que, pour chaque valeur de k, il existe *un* entier p_k vérifiant cette inégalité. Cette remarque pourra être utilisée dans certains exemples.

aucun des pôles, la somme de ces termes est évidemment finie, et il est inutile d'en tenir compte dans l'étude de la convergence. Pour les autres pôles a_k, les cercles C_k qui correspondent à chacun d'eux comprennent C à leur intérieur. On aura par suite dans C et *a fortiori* dans A

$$|R'_k(z)| < \varepsilon_k,$$

et il suffit alors de prendre pour les ε_k les termes successifs d'une série convergente à termes positifs pour que l'uniformité de la convergence de la série $\sum R'_k(z)$ soit manifeste $\left(\text{on prendra, par exemple, } \varepsilon_k = \frac{1}{k^2}\right)$.

Nous avons donc obtenu un premier développement très important des fonctions méromorphes. Dans la méthode que nous avons suivie il entre peu d'arbitraire dans le choix des polynomes qui assurent la convergence de la série $\sum R_i(z)$: nous prenons pour les former les premiers termes du développement en série de Taylor de la partie principale relative à chaque pôle; le nombre seul de ces termes dépend du choix des ε_k; mais chacun d'eux est déterminé. D'une manière plus précise, on peut dire que, pour un pôle d'ordre donné, les coefficients de ces développements sont des fonctions à coefficients *numériques* des coefficients qui entrent dans la partie principale et de l'affixe du pôle. On peut donner des formes beaucoup plus générales aux polynomes introduits. Mais nous n'y trouverions aucun avantage, un développement d'une forme déterminée étant beaucoup plus utile qu'un développement plus arbitraire. Par exemple, rien n'empêche de développer en série la fonction entière $\varphi(z)$ et d'en distribuer les termes entre les polynomes Q. Nous aurions une expression en apparence plus simple puisque la fonction entière qui figure dans notre développement aurait disparu, mais nous aurions perdu le bénéfice de cette forme *canonique* que nous avons donnée aux polynomes Q. Comme on ne sait rien sur la fonction $\varphi(z)$, ces polynomes seraient entièrement arbitraires, sauf, bien entendu, les restrictions nécessaires à la démonstration.

Le théorème précédent a été obtenu pour la première fois par M. Mittag-Leffler. Nous allons en déduire le théorème fonda-

mental de Weierstrass, ce qui nous fournira l'occasion de rappeler la définition du genre d'une fonction entière. Remarquons que l'ordre que nous suivons n'est pas l'ordre chronologique. C'est au contraire le théorème de Weierstrass qui a été démontré en premier lieu et par une voie assez différente de celle que nous avons adoptée, quoique au fond équivalente.

III. — *Le théorème de Weierstrass.*

Ce théorème est relatif au développement d'une fonction entière en un produit de facteurs mettant chacun en évidence un zéro de cette fonction.

Soit $G(z)$ une fonction entière admettant le point a pour zéro d'ordre n. On pourra écrire

$$G(z) = (z-a)^n G_1(z),$$

$G_1(z)$ étant une fonction entière qui n'admet plus le zéro a. Considérons la dérivée logarithmique de $G(z)$. Nous aurons

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \frac{n}{z-a} + \frac{G_1'(z)}{G_1(z)},$$

et comme $G_1(a) \neq 0$, cette dérivée admet visiblement le point a comme pôle simple de résidu n.

On verrait de même qu'un point régulier de $G(z)$, qui n'est pas un zéro, est un point régulier de la dérivée logarithmique. La dérivée logarithmique d'une fonction entière est donc une fonction méromorphe ([1]). Appliquons-lui le théorème de M. Mittag-Leffler, nous aurons

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \sum \left[\frac{n_k}{z-a_k} + P_k(z) \right] + g(z),$$

a_k étant un zéro d'ordre n_k de la fonction $G(z)$ et $g(z)$ désignant une fonction entière. Quant au polynome P_k, il est composé d'un certain nombre de termes du développement en série de $-\dfrac{n_k}{z-a_k}$.

([1]) Il en résulte qu'une fonction entière a un nombre limité de zéros dans une région limitée du plan.

Supposons, ce qui est toujours possible ([1]), les a_k différents de zéro et intégrons entre zéro et z. Nous aurons

$$\log \frac{G(z)}{G(o)} = \sum \left[n_k \log\left(\frac{z - a_k}{-a_k}\right) + Q_k(z) \right] + \Gamma(z),$$

en posant

$$Q_k(z) = \int_0^z P_k(z)\, dz,$$

et en désignant par $\Gamma(z)$ une nouvelle fonction entière. Par suite

$$G(z) = G(o) e^{\Gamma(z)} \prod \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)^{n_k} e^{Q_k(z)}.$$

Cette formule résume le théorème de Weierstrass.

Voyons quelle est la forme du polynome $Q_k(z)$. Nous aurons

$$P_k(z) = n_k \left(\frac{1}{a_k} + \frac{z}{a_k^2} + \ldots + \frac{z^{\beta_k - 1}}{a_k^{\beta_k}}\right)$$

et par suite

$$Q_k(z) = n_k \left(\frac{z}{a_k} + \frac{z^2}{2 a_k^2} + \ldots + \frac{z^{\beta_k}}{\beta_k a_k^{\beta_k}}\right),$$

les entiers β_k étant tels que la série de fractions rationnelles converge. Il suffit de prendre pour cela $\beta_k = k$, comme on le voit aisément. On aura alors pour développement d'une fonction entière quelconque l'expression

$$G(z) = G(o) e^{\Gamma(z)} \prod \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\frac{z}{a_k} + \frac{z^2}{2a_k^2} + \ldots + \frac{z^k}{k a_k^k}}.$$

Mais il peut arriver que l'on puisse choisir pour β_k une valeur moindre, par exemple une valeur p qui sera la même pour tous les zéros. Si, de plus, $\Gamma(z)$ est un polynome de degré p au plus, on dit que la fonction est de genre p et son développement est de la forme

$$G(z) = G(o) e^{\Gamma(z)} \prod \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\frac{z}{a_k} + \ldots + \frac{z^p}{p a_k^p}}.$$

On voit aussi facilement qu'une condition nécessaire pour qu'il

([1]) *Voir* page 8.

en soit ainsi est que la série

$$\sum \frac{1}{|a_k^{p+1}|}$$

soit convergente.

Faisons encore une remarque sur le facteur exponentiel $e^{\Gamma(z)}$. Comme tout à l'heure pour la série de M. Mittag-Leffler, on pourrait le faire disparaître en en répartissant les différents facteurs entre les exponentielles du produit infini. Ici encore on n'y trouverait qu'un avantage apparent. Il vaut bien mieux conserver la forme canonique du facteur que Weierstrass a appelé *facteur primaire,* c'est-à-dire de l'élément du produit infini.

Nous n'insisterons pas davantage sur le théorème capital de Weierstrass. Nous avons déjà développé son étude, ainsi que celle de la notion de genre (¹). Nous avons voulu simplement, au sujet du théorème de M. Mittag-Leffler, indiquer un moyen simple de retrouver ce résultat.

Signalons cependant une conséquence du théorème de Weierstrass, très importante et qui nous intéresse directement. C'est le théorème suivant :

Toute fonction méromorphe est le quotient de deux fonctions entières.

En effet, soit $f(z)$ une fonction méromorphe. On peut former une fonction entière admettant pour zéros les pôles de $f(z)$ avec leur degré de multiplicité. Soit $G(z)$ cette fonction. Le produit $f(z)\,G(z)$ sera alors visiblement une fonction entière $F(z)$ et l'on aura

$$f(z) = \frac{F(z)}{G(z)}.$$

C'est ce que nous voulions démontrer.

L'expression que nous venons d'obtenir est à rapprocher du développement de M. Mittag-Leffler. Ces expressions rapprochent toutes les deux les fonctions méromorphes des fractions rationnelles.

(¹) Voir Borel, *Leçons sur les fonctions entières.* — Le Mémoire de Weierstrass a été traduit dans les *Annales de l'École Normale,* 1879.

CHAPITRE II.

LA SÉRIE DE TAYLOR.

I. — *Le rayon de convergence.*

Nous nous proposons, dans ce Chapitre, d'étudier les propriétés des fonctions méromorphes, et en particulier leurs singularités, au moyen de leur développement en série de puissances, c'est-à-dire au moyen d'un développement de la forme

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots. \tag{1}$$

Nous supposons implicitement que l'origine n'est pas un point singulier : nous avons vu dans le Chapitre précédent que cette hypothèse est légitime.

Nous aurons donc à notre disposition deux développements différents, présentant chacun leurs avantages et leurs inconvénients : le développement de Taylor a l'avantage d'être un instrument de calcul très souple, très maniable, auquel s'appliquent dans une large mesure les opérations du Calcul différentiel et du Calcul intégral. Il présente de plus un caractère de généralité très avantageux pour des recherches sur la théorie générale des fonctions, mais qui est plutôt une gêne dans l'étude d'une catégorie particulière de fonctions comme les fonctions méromorphes. En effet, ce développement ne met nullement en évidence les singularités de la fonction qu'il représente, ce qui est au contraire le grand avantage du développement de M. Mittag-Leffler.

Signalons encore, outre ces deux développements, l'expression d'une fonction méromorphe comme quotient de deux fonctions entières, due à Weierstrass. Nous étudierons à ces différents points de vue les fonctions méromorphes en montrant les rapports qu'il y a entre ces études.

Considérons donc un développement de la forme (1) et commençons par préciser la notion fondamentale de l'existence d'un

rayon de convergence. Cauchy a, le premier, montré que l'on pouvait trouver un nombre ρ tel que la série (1) soit convergente pour $|z| < \rho$ et divergente pour $|z| > \rho$. Si l'on trace le cercle de rayon ρ ayant pour centre l'origine, la série sera convergente à l'intérieur du cercle, divergente à l'extérieur. Ce cercle est le cercle de convergence; ρ est le rayon de convergence. On ne sait rien sur la nature de la fonction sur le cercle de convergence lui-même. Cauchy a démontré de plus que, si l'on considère les quantités $|\sqrt[n]{a_n}|$, le rayon de convergence est égal à $\frac{1}{\lambda}$ en désignant par λ la plus grande limite de ces quantités. Mais Cauchy n'a pas défini le sens des mots : *plus grande limite* avec la rigueur qui est maintenant d'usage. Le sens de cette expression a été précisé par Paul du Bois-Reymond, qui lui donne le nom de *limite supérieure d'indétermination*. Reprenons brièvement cette définition.

Étant donnée une suite de nombres réels quelconques u_0, u_1, ..., u_n, ..., nous rangerons l'ensemble des nombres réels en deux catégories. La première, ou classe supérieure, comprendra les nombres qui, à partir d'une certaine valeur de n, sont plus grands que tous les nombres u_n. La classe inférieure comprendra au contraire les nombres ne remplissant pas cette condition, c'est-à-dire tels qu'il y ait, dans la suite précédente, des nombres de rang aussi élevé qu'on veut supérieurs à l'un quelconque d'entre eux. Il est bien manifeste qu'un nombre de la classe inférieure ne saurait être supérieur à un nombre de la classe supérieure. Cela suffit, on le sait, à établir l'existence d'un nombre L séparant les deux classes, la première se composant dès lors des nombres supérieurs à L, la seconde des nombres inférieurs à L. C'est ce nombre L que du Bois-Reymond appelle *limite supérieure d'indétermination*.

On pourra dire encore que les nombres de la suite considérée forment un ensemble. L sera le plus grand nombre de l'ensemble dérivé, c'est-à-dire de l'ensemble formé par les points limites du premier.

M. Hadamard a donné à ce même nombre le nom de *limite supérieure pour n infini*. Ces mots de *limite supérieure* peuvent prêter à confusion : Il peut exister en effet des nombres de l'en-

semble supérieurs à cette limite supérieure, car la première classe contient des nombres qui ne sont pas nécessairement inférieurs à *tous* les nombres de l'ensemble. Il vaudrait peut-être mieux employer la dénomination de *plus grande limite,* qui est celle de Cauchy et qui se rattache à la théorie des ensembles. Quoi qu'il en soit, nous emploierons indifféremment les noms précédents et nous représenterons L au moyen de la notation suivante due à M. Pringsheim :

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\, u_n = \mathrm{L},$$

que nous écrirons aussi quelquefois

$$\overline{\lim}\, u_n = \mathrm{L}.$$

Revenons maintenant à la détermination du rayon de convergence de la série (1). M. Lecornu avait démontré ([1]) que, lorsque le rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tend vers une limite, l'inverse de cette limite donne le rayon de convergence. M. Hadamard a résolu d'une manière générale le problème dont M. Lecornu avait traité un cas particulier. Il considère la suite $u_n = \left|\sqrt[n]{a_n}\right|$. Soit l sa limite supérieure pour n infini. Le rayon de convergence de la série est $\frac{1}{l}$.

Donnons en effet à z une valeur inférieure en module à $\frac{1}{l}$, $|z| = \frac{1}{l+\varepsilon}$ par exemple. Prenons entre $|z|$ et $\frac{1}{l}$ une valeur quelconque $|z'| = \frac{1}{l+\varepsilon'}$. A partir d'une certaine valeur de n, on aura

$$\frac{1}{|z'|} = l + \varepsilon' > \left|\sqrt[n]{a_n}\right|,$$

c'est-à-dire

$$\left|\sqrt[n]{a_n z'^n}\right| < 1.$$

La série est donc convergente pour la valeur $|z|$.

Au contraire, si nous donnons à z une valeur dont le module soit

$$|z| = \frac{1}{l-\varepsilon},$$

([1]) *Comptes rendus,* 7 février 1887.

il y aura des valeurs de n de rang aussi élevé qu'on voudra, telles que

$$\frac{1}{|z|} = l - \varepsilon < |\sqrt[n]{a_n}|$$

ou

$$\sqrt[n]{a_n z^n} > 1.$$

La série renfermant une infinité de termes supérieurs à 1 est donc divergente. Le théorème est donc démontré.

En particulier, si $\sqrt[n]{a_n}$ croît indéfiniment, le cercle de convergence se réduit à l'origine.

Pour que la série soit convergente dans tout le plan, c'est-à-dire représente une fonction entière, il faut et il suffit que $l = 0$. Or, si des nombres positifs ont pour limite supérieure d'indétermination la valeur zéro, ils admettent ce nombre comme limite au sens ordinaire du mot, et inversement, car l'ensemble dérivé se réduit à cette valeur. Nous dirons, avec M. Hadamard, que les nombres considérés tendent *régulièrement* vers zéro, et, d'après cela, on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que la série (1) représente une fonction entière est que $\left|\sqrt[n]{a_n}\right|$ tende régulièrement vers zéro.

Si $l \neq 0$, le cercle de convergence a pour rayon $\frac{1}{l}$ et la série (1) définit la fonction $f(z)$ uniquement à l'intérieur de ce cercle. Nous allons maintenant étudier la fonction sur le cercle lui-même.

II. — *Recherche des pôles dans les cas simples. Les résultats de M. Hadamard.*

Pôle unique. — Supposons d'abord que la fonction $f(z)$ admette sur son cercle de convergence un pôle unique d'ordre m. Soit a ce pôle. On pourra alors écrire

$$(2) \qquad f(z) = \frac{A_0}{(z-a)^m} + \frac{A_1}{(z-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{z-a} + f_1(z),$$

A_0, A_1, A_{m-1} étant des constantes et $f_1(z)$ étant une fonction dont le rayon de convergence est supérieur à $|a|$. En effet, la différence entre $f(z)$ et la partie principale relative à a ne doit pas

avoir de pôle à l'intérieur d'un cercle entourant le cercle de convergence de $f(z)$ et suffisamment voisin de ce cercle.

Choisissons alors un nombre positif ρ supérieur à $|a|$ et inférieur au rayon de convergence de $f_1(z)$. Si le développement de $f_1(z)$ en série est le suivant :

$$f_1(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots,$$

cette série est convergente pour $z = \rho$, et, par suite, le module de chacun de ses termes est inférieur à une quantité fixe M. On a donc

$$|b_k| < \frac{M}{\rho^k}.$$

On peut donc poser

$$b_k = \theta_k \frac{M}{\rho^k},$$

θ_k ayant un module inférieur à 1.

Ceci posé, on a

$$\frac{1}{a - z} = \frac{1}{a} + \frac{z}{a^2} + \frac{z^2}{a^3} + \ldots + \frac{z^p}{a^{p+1}} + \ldots.$$

En dérivant $h - 1$ fois cette égalité, nous aurons

$$(-1)^h \frac{(h-1)!}{(z-a)^h} = \sum_p p(p-1)\ldots(p-h+2)\frac{z^{p-h+1}}{a^{p+1}}.$$

Calculons alors le coefficient de z^k dans les deux membres de l'égalité (2). Dans le premier membre, le coefficient est a_k. Dans le second membre, nous aurons une somme de $m + 1$ termes. Les m premiers sont, comme on le voit aisément,

$$\sum_{h=1}^{h=m} (-1)^h \frac{A_{m-h}}{(h-1)!}(h+k-1)(h+k-2)\ldots(k+1)\frac{1}{a^{h+k}}.$$

Le $(m+1)^{\text{ième}}$ est égal à $\frac{\theta_k M}{\rho^k}$.

Cherchons la limite pour k infini de $\sqrt[k]{a_k}$. Parmi les m premiers termes du second membre, considérons en particulier

$$(-1)^m \frac{A_0}{(m-1)!}(m+k-1)(m+k-2)\ldots(k+1)\frac{1}{a^{k+m}}.$$

La racine $k^{\text{ième}}$ de ce terme tend vers $\frac{1}{a}$. En effet, la racine du

coefficient constant

$$(-1)^m \frac{A_0}{(m-1)!\, a^m}$$

tend vers 1. Cherchons la limite de

$$\sqrt[k]{(m+k-1)\dots(k+1)}.$$

Cette limite est évidemment 1. En effet $\sqrt[k]{k^p}$ a pour logarithme $p\frac{\log k}{k}$, qui tend vers zéro. Donc l'expression précédente tend vers 1.

En second lieu, le rapport de chacun des m autres termes à celui que nous avons considéré tend vers zéro : c'est évident pour les $m-1$ premiers, puisque ce rapport contient au dénominateur un polynome de degré $m-1$ en k et au numérateur un polynome de degré $h-1$ seulement. Pour le dernier, il suffira de remarquer que ρ a été choisi supérieur à $|a|$. Il en résulte que la limite de $\sqrt[k]{a_k}$ est aussi $\frac{1}{a}$ (1).

Donc, quand une fonction méromorphe donnée par un développement en série de Taylor de la forme (1) admet, sur son cercle de convergence, un pôle et un seul, simple ou multiple d'ailleurs, l'affixe de ce pôle est la limite, pour n infini, de $\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$.

Avant de passer à un cas plus compliqué, faisons quelques remarques. D'abord l'expression que nous avons donnée pour le coefficient a_k met en évidence un principe posé par M. Darboux dans son *Mémoire sur les fonctions de grands nombres* (2) : la valeur des coefficients dépend essentiellement de la nature des points singuliers sur le cercle de convergence.

Dans un autre ordre d'idées, nous remarquerons qu'on peut

---

(1) En effet, soit une expression de la forme $\sqrt[k]{A+B}$; supposons que $\sqrt[k]{A}$ ait une limite L et que $\frac{B}{A}$ tende vers zéro. On a

$$\frac{\sqrt[k]{A+B}}{\sqrt[k]{A}} = \sqrt[k]{1+\frac{B}{A}}.$$

Cette expression tend visiblement vers 1 et, par suite, $\sqrt[k]{A+B}$ tend vers L.

(2) *Journal de Liouville*, 1878.

calculer non seulement l'affixe du pôle a, mais aussi son ordre de multiplicité m. La partie principale du coefficient a_k est en effet

$$\frac{A' k^{m-1}}{a^k},$$

A' étant indépendant de k. De là résulte immédiatement qu'après avoir calculé a, on aura m par la formule

$$m - 1 = \lim \frac{\log a_k + k \log a}{\log k}.$$

Enfin, nous remarquerons que l'affixe a du pôle est aussi l'inverse de la limite du rapport $\frac{a_{k+1}}{a_k}$.

Si nous formons ce rapport, nous pourrons en effet l'écrire, en multipliant haut et bas par a^k,

$$\frac{\sum\left[(-1)^h \frac{A_{m-h}}{(h-1)!}(h+k)(k+k-1)\ldots(k+2)\frac{1}{a_h}\frac{1}{a}\right] + \theta_{k+1}\frac{M}{\rho^{k+1}}a^k}{\sum\left[(-1)^h \frac{A_{m-h}}{(h-1)!}(h+k-1)(h+k-2)\ldots(k+1)\frac{1}{a_h}\right] + \theta_k \frac{M}{\rho^k}a^k}.$$

Si l'on divise haut et bas par k^{m-1} et si l'on remarque que $|a| < \rho$, on voit sans peine que ce rapport tend vers $\frac{1}{a}$. Ici encore on peut calculer m. Il suffira pour cela de mettre l'expression précédente sous la forme

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{a} + \frac{1}{k}A + \frac{1}{k^2}B + \ldots.$$

le coefficient A contenant m. On déterminera m en cherchant la limite pour k infini de

$$k\left(\frac{a_{k+1}}{a_k} - \frac{1}{a}\right).$$

Cas de plusieurs pôles. — Pour préparer la méthode que nous allons suivre, étudions d'abord le cas où le cercle de convergence ne renferme que deux pôles simples. Je désignerai ces pôles par $\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{\beta}$. Si alors on pose

$$f(z) = \frac{A}{1-\alpha z} + \frac{B}{1-\beta z} + f_1(z),$$

f_1 sera une fonction dont le rayon de convergence sera supérieur à $\frac{1}{|\alpha|} = \frac{1}{|\beta|}$. Prenons un nombre $\frac{1}{\lambda} = \rho$ inférieur à ce rayon et supérieur à $\frac{1}{|\alpha|} = \frac{1}{|\beta|}$. On aura

$$\lambda < |\alpha| = |\beta|.$$

On voit immédiatement, en égalant les valeurs des coefficients de z^n dans les deux membres, que l'on a

$$a_n = A\alpha^n + B\beta^n + b_n,$$

b_n étant le coefficient de z^n dans $f_1(z)$. On peut encore poser, comme tout à l'heure,

$$b_n = \frac{\theta_n M}{\rho^n} = \theta_n M \lambda^n,$$

M étant une quantité fixe et θ_n une quantité de module inférieur à 1. Ce qui différentie ce cas du précédent, c'est que, α et β ayant même module, aucun des deux termes $A\alpha^n$, $B\beta^n$ n'est la partie principale du second membre. Pour mettre en évidence cette partie principale, considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A\alpha^n + B\beta^n + \theta_n M\lambda^n & \dots \\ A\alpha^{n+1} + B\beta^{n+1} + \theta_{n+1} M\lambda^{n+1} & \dots \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est une somme de plusieurs autres dont un certain nombre sont nuls : ce sont ceux que l'on obtient en associant entre eux les deux premiers termes ou les deux seconds termes. Les déterminants restant forment deux groupes. Dans l'un de ces groupes ne figure pas λ. Ce groupe renferme les deux déterminants

$$\begin{vmatrix} A\alpha^n & B\beta^{n+1} \\ A\alpha^{n+1} & B\beta^{n+2} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} B\beta^n & A\alpha^{n+1} \\ B\beta^{n+1} & A\alpha^{n+2} \end{vmatrix}.$$

Leur somme est

$$AB\alpha^n\beta^n \left[\begin{vmatrix} 1 & \beta \\ \alpha & \beta^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & \alpha^2 \end{vmatrix} \right] = AB\alpha^n\beta^n(\alpha - \beta)^2.$$

Les autres déterminants contiennent, au contraire, λ^n en facteur. Leur somme a un module inférieur à une quantité de la

forme

$$\theta \,|\, a^n \,|\, H \lambda^n,$$

θ étant inférieur à 1 et positif, et H étant un nombre fixe. Il en résulte, sans qu'il soit nécessaire d'insister davantage, que l'on a

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \alpha\beta.$$

C'est une généralisation du théorème démontré dans le cas du pôle simple.

Considérons maintenant une fonction $f(z)$ n'ayant, dans un cercle C de rayon $\frac{1}{\rho}$, que des pôles simples dont je désignerai les affixes par $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_p}$ et n'ayant aucun pôle sur ce cercle. Supposons les α rangés par ordre de module croissant. Si l'on pose

$$|\alpha_i| = \rho_i,$$

on aura donc

$$\rho_1 \geqq \rho_2 \geqq \rho_3 \geqq \ldots \geqq \rho_p > \rho,$$

$f(z)$ pourra se mettre sous la forme

$$\frac{A_1}{1 - \alpha_1 z} + \frac{A_2}{1 - \alpha_2 z} + \ldots + \frac{A_p}{1 - \alpha_p z} + f_1(z),$$

$A_1, A_2, \ldots, A_p$ étant des constantes et $f_1(z)$ étant holomorphe dans le cercle C et sur son contour. Si donc on pose

$$f_1(z) = \sum b_n z^n,$$

on pourra écrire

$$b_n = \theta_n M \rho^n,$$

M étant un nombre fixe et θ_n étant un module inférieur à 1.

Le développement précédent de $f(z)$ sera valable dans le domaine limité, d'une part, par le cercle C et, d'autre part, par p cercles de rayons aussi petits qu'on voudra, mais fixes, entourant les points $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_p}$. D'autre part, $f(z)$ pourra être représentée par une série de puissances

$$f(z) = \sum a_n z^n,$$

et la comparaison des deux développements ainsi trouvés permet d'écrire l'égalité

$$(3) \qquad a_n = A_1 \alpha_1^n + A_2 \alpha_2^n + \ldots + A_p \alpha_p^n + \theta_n M \rho^n.$$

III. — *Étude du cas général.*

Pour généraliser la méthode suivie dans le cas précédent, où il n'y avait que deux pôles simples, nous serons conduits à considérer des déterminants tels que

$$\Delta_n^p = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{n+p-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & \dots & a_{n+p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+p-1} & a_{n+p} & \dots & \dots & a_{n+2p-2} \end{vmatrix}.$$

Nous aurons à considérer aussi des déterminants formés toujours de la même manière, mais d'ordre inférieur ou supérieur à p. Soient, par exemple,

$$\Delta_n^{p+q} = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \dots & a_{n+p+q-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+p+q-1} & \dots & \dots & a_{n+2p+2q-2} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_n^r = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \dots & a_{n+r-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+r-1} & \dots & \dots & a_{n+2r-2} \end{vmatrix} \qquad (r < p).$$

Considérons d'abord les déterminants Δ_n^p.

En vertu des expressions (3) des coefficients a_n, on a

$$\Delta_n^p = \begin{vmatrix} A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n + \dots + \theta_n M\rho^n & A_1\alpha_1^{n+1} + \dots + \theta_{n+1} M\rho^{n+1} & \dots \\ A_1\alpha_1^{n+1} + A_2\alpha_2^{n+2} + \dots + \theta_{n+1} M\rho^{n+1} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant se décompose en une somme de déterminants qui forment deux groupes. Le premier groupe contient les déterminants indépendants des θ_n. On obtient évidemment la somme des déterminants de ce groupe en remplaçant M par o dans l'expression de Δ_n^p. Le déterminant que l'on obtient ainsi est visiblement le produit des deux déterminants suivants

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_p \\ A_1\alpha_1 & A_2\alpha_2 & \dots & A_p\alpha_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1\alpha_1^{p-1} & A_2\alpha_2^{p-1} & \dots & A_p\alpha_p^{p-1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_p^n \\ \alpha_1^{n+1} & \dots & \dots & \alpha_p^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{n+p-1} & \dots & \dots & \alpha_p^{n+p-1} \end{vmatrix}.$$

Le premier déterminant est le produit de $A_1 A_2 \ldots A_p$ par le déterminant de Vandermonde des α. Le second est le produit de ce même déterminant de Vandermonde par le produit $\alpha_1^n \alpha_2^n \ldots \alpha_p^n$. Le premier groupe de déterminants se réduit donc à

$$(4) \qquad A_1 A_2 \ldots A_p \alpha_1^n \alpha_2^n \ldots \alpha_p^n \prod (\alpha_i - \alpha_k)^2.$$

Considérons maintenant le second groupe de déterminants, formé de ceux qui contiennent M. Un certain nombre de ces déterminants seront nuls : ce sont ceux que l'on obtient en prenant dans deux colonnes ou plus du déterminant Δ_n^p la lettre α avec le même indice. Nous aurons un déterminant différent de zéro en prenant dans $p - \mu$ colonnes la lettre α avec des indices tous différents et dans les μ autres, le terme en θ. Ce déterminant aura en facteur

$$(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p \rho^\mu)^n,$$

où le produit $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$ renferme $p - \mu$ facteurs. Après cette mise en facteur, le déterminant obtenu ne dépendra plus de n que par les θ, et comme ceux-ci ont un module inférieur à 1, le module de ce déterminant sera inférieur à une quantité fixe H. Le module du déterminant considéré sera donc de la forme

$$\lambda H (\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_p \rho^\mu)^n,$$

λ étant compris entre 0 et 1.

La parenthèse contient p facteurs dont $p - \mu$ sont les modules des α et les μ autres sont égaux à ρ, c'est-à-dire inférieurs à ρ_i. Le rapport des déterminants du deuxième groupe, à l'expression obtenue des déterminants du premier, tend donc manifestement vers zéro quand n croît indéfiniment. Par suite, comme nous l'avons déjà remarqué, si l'on veut chercher la limite de la racine $n^{\text{ième}}$ de Δ_n^p, il suffira de considérer la racine $n^{\text{ième}}$ de l'expression (4). Or, cette dernière tend évidemment vers $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$, car la racine de la quantité constante

$$A_1 A_2 \ldots A_p \prod (\alpha_i - \alpha_k)^2$$

tend vers 1.

Donc, *l'expression* $\sqrt[n]{\Delta_n^p}$ *tend régulièrement vers la limite* $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$.

Si, au lieu de considérer le déterminant Δ_n^p, on avait considéré son module, on aurait vu que la racine $n^{\text{ième}}$ de ce module tend vers $\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_p$.

Considérons, en second lieu, un déterminant Δ_n^{p+q}. Ici, nous ne pouvons plus considérer, parmi les déterminants dont il est la somme, ceux qui sont indépendants des θ, car le nombre des lignes de Δ_n^{p+q} étant supérieur au nombre p des α, nous ne pourrons prendre un α dans chaque colonne que sous la condition d'en prendre un certain nombre avec le même indice, ce qui donne un déterminant nul. Δ_n^{p+q} sera donc une somme de déterminants dans chacun desquels une colonne au moins contiendra des θ. Considérons l'un de ces déterminants. On peut mettre en facteur dans chaque colonne, soit α_i^n, soit ρ^n, et le déterminant, après la mise en facteur, ne dépendra plus de n que par l'intermédiaire des θ. On peut donc désigner son module par $\lambda_n H$, H étant une constante et λ_n étant compris entre o et 1. Δ_n^{p+q} sera donc une somme de termes dont le module pourra être mis sous la forme

$$\lambda_n H\left(\rho_1^{\varepsilon_1}\rho_2^{\varepsilon_2}\ldots\rho_p^{\varepsilon_p}\rho^{p+q-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\ldots-\varepsilon_p}\right)^n.$$

Les nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ étant égaux soit à o, soit à 1. Pour obtenir la partie principale de ce déterminant, il faudra bien évidemment considérer ceux de ces termes que l'on obtient en faisant tous les ε égaux à 1. Ces termes peuvent, d'ailleurs, se détruire. *La limite de* $\sqrt[n]{|\Delta_n^{p+q}|}$, *si elle existe, est donc au plus égale à*

$$\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_p \rho^q.$$

Mais rien ne permet d'affirmer que cette limite existe.

Soit enfin un déterminant d'ordre inférieur à p. Soit

$$\Delta_n^r = \begin{vmatrix} a_n & \ldots & a_{n+r-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n+r-1} & \ldots & a_{n+2r-2} \end{vmatrix} \qquad (r < p).$$

D'abord si, quel que soit le nombre positif k, on avait

$$\rho_{k+r} < \rho_r,$$

il n'y aurait rien à ajouter à ce que nous avons dit. Il suffirait de considérer un cercle de rayon inférieur à $\frac{1}{\rho_{r+1}}$ et supérieur à $\frac{1}{\rho_r}$.

Ce cercle renfermerait, à son intérieur, les points $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_r}$, et, sur le cercle, il n'y aurait aucun pôle de $f(z)$. Les résultats obtenus précédemment s'appliqueraient donc sans modification.

Mais il peut arriver que le cercle de rayon $\frac{1}{\rho_r}$ contienne non seulement le point $\frac{1}{\alpha_r}$, mais aussi d'autres pôles d'indices supérieurs ou inférieurs à r. Si ces pôles sont tous d'indice inférieur à r, on est, comme on le voit de suite, dans un cas analogue au cas précédent. Le seul cas vraiment nouveau est celui où il y a des pôles de même module que le pôle $\frac{1}{\alpha_r}$ et d'indice plus grand.

On peut toujours supposer que ce module est celui de $\frac{1}{\alpha_p}$. S'il n'en est pas ainsi, on tracera un cercle de rayon supérieur à $\frac{1}{\rho_r}$ mais ne contenant à son intérieur ou sur son contour aucun pôle de module supérieur à $\frac{1}{\rho_r}$; on appellera p le nombre total des pôles intérieurs à ce cercle. Nos hypothèses sont donc les suivantes : on a

$$|\alpha_{p-h+1}| = |\alpha_{p-h+2}| = \ldots = |\alpha_p| = \rho_p,$$

et l'on considère un déterminant Δ_n^r, r étant compris entre $p-h+1$ et p, pouvant être égal à $p-h+1$, mais ne pouvant devenir égal à p

$$p-h+1 \leqq r < p.$$

Pour avoir la partie principale de ce déterminant, nous pouvons remplacer M par o, ce qui nous donne le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n + \ldots\ A_p\alpha_p^n & \ldots & A_1\alpha_1^{n+r-1} + \ldots + A_p\alpha_p^{n+r-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1\alpha_1^{n+r-1} + A_2\alpha_2^{n+r-1} + \ldots + A_p\alpha_p^{n+r-1} & \ldots & A_1\alpha_1^{n+2r-2} + \ldots + A_p\alpha_p^{n+2r-2} \end{vmatrix}.$$

Le nombre des colonnes est inférieur au nombre des termes dont chaque élément est la somme. Pour avoir les plus grands termes du déterminant, nous remarquerons que l'on a

$$\rho_{p-h} > \rho_{p-h+1}.$$

Nous devrons prendre, par suite, dans $p-h$ colonnes, la

lettre α avec les indices 1, 2, ..., $p-h$ et, dans les autres colonnes, avec un indice supérieur à $p-h$. Comme ici θ n'entre plus dans le déterminant, après mise en facteur des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des α, nous aurons un déterminant qui ne dépendra plus de n et qui, par suite, sera une constante. La partie principale de Δ_n^r sera donc une somme de termes de la forme

$$B(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-h})^n(\alpha_{p-h+1}\ldots\alpha_p)^n,$$

le nombre total des facteurs $\alpha_{p-h+1}, \ldots, \alpha_p$ étant égal à $r-p+h$ de manière que le nombre total des facteurs soit r. On voit que les B ne peuvent être nuls, puisque ce sont des produits des quantités A par des différences $\alpha_i-\alpha_k$. Le module de l'expression précédente est

$$|B|(\rho_1\rho_2\ldots\rho_{p-h}\rho_p^{r-p+h})^n = |B|R^n,$$

en posant

$$R = \rho_1\rho_2\ldots\rho_{p-h}\rho_p^{r-p+h}.$$

En résumé, le déterminant Δ_n^r peut se mettre sous la forme

$$\Delta_n^r = B_1\beta_1^n + B_2\beta_2^n + \ldots + B_k\beta_k^n + C_1\gamma_1^n + \ldots$$

avec les conditions

$$|\beta_1| = |\beta_2| = \ldots = |\beta_k| = R \qquad |\gamma_i| < R,$$

et, de plus, les B ne peuvent être tous nuls.

Je dis que R *est la plus grande limite de la racine* $n^{\text{ième}}$ *de* $|\Delta_n^r|$. En effet, pour étudier cette limite, nous pouvons nous borner à la partie principale

$$B_1\beta_1^n + \ldots + B_k\beta_k^n.$$

Cette expression est le coefficient de z^n dans le développement en série entière de

$$\varphi(z) = \frac{B_1}{1-\beta_1 z} + \frac{B_2}{1-\beta_2 z} + \ldots + \frac{B_k}{1-\beta_k z}.$$

Sa racine $n^{\text{ième}}$ a donc pour plus grande limite l'inverse du rayon de convergence de $\varphi(z)$. Or, ou bien les pôles $\frac{1}{\beta_1}, \ldots, \frac{1}{\beta_k}$ de $\varphi(z)$ ne se détruisent pas, et alors ce rayon de convergence est $\frac{1}{|\beta|} = \frac{1}{R}$;

ou bien ils se détruisent : dans ce cas, il n'y aurait aucun pôle de $\varphi(z)$ à l'intérieur du cercle de rayon $\frac{1}{R}$; $\varphi(z)$ serait alors identiquement nulle et l'on devrait avoir

$$B_1 = B_2 = \ldots = B_k = 0,$$

ce qui est impossible.

Donc, on peut écrire

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|\Delta_n^r|} = R \qquad (r < p).$$

Pour certaines valeurs de n l'expression $\sqrt[n]{|\Delta_n^r|}$ pourra être très éloignée de sa valeur limite. Ainsi, soit, par exemple, la fonction

$$\frac{1}{1 - x^3} = 1 + x^3 + x^6 + \ldots.$$

Il y a manifestement une infinité de déterminants Δ_n^2 qui sont nuls, et une infinité qui sont égaux à 1. Les racines carrées de leurs modules ne tendent évidemment pas vers une limite, mais elles ont 1 pour plus grande limite. On a donc

$$R = 1,$$

ce qui est évident *a priori*.

Il nous reste à étudier le cas où certains des pôles sont multiples. On peut encore traiter ce cas par l'étude directe des déterminants Δ. Nous avons déjà étudié le cas du pôle unique et multiple, et l'on a pu se rendre compte que le calcul direct n'est pas très simple. On peut éviter ces calculs en considérant le cas des pôles multiples comme un cas limite des cas précédents.

On a, en effet,

$$\frac{B_1}{(1 - \alpha_1 z)^2} = \lim_{\alpha_1 = \alpha_2} \frac{B_1}{(1 - \alpha_1 z)(1 - \alpha_2 z)}.$$

Or

$$\frac{B_1}{(1 - \alpha_1 z)(1 - \alpha_2 z)} = \frac{A_1}{1 - \alpha_1 z} + \frac{A_2}{1 - \alpha_2 z}$$

et, si l'on calcule A_1 et A_2, on trouve

$$A_1 = \frac{B_1 \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}, \qquad A_2 = \frac{B_1 \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Alors, dans l'expression

$$A_1 A_2 \ldots A_p \prod (\alpha_i - \alpha_k)^2$$

que nous avons à considérer d'après les calculs précédents, la différence $\alpha_1 - \alpha_2$ disparaît, et, sans qu'il soit utile d'insister davantage, on arrive à la conclusion suivante : tous les résultats établis subsistent si quelques-uns des pôles simples deviennent multiples à condition de compter chacun des pôles multiples avec son degré de multiplicité.

C'est à M. Hadamard (1) que sont dus les importants résultats que nous venons d'établir; sa méthode d'exposition a l'avantage de démontrer en même temps les réciproques. Mais, jusqu'à présent, on ne les a jamais utilisées; on n'aperçoit même pas très bien le moyen de les utiliser. Quoi qu'il en soit, comme nous n'en ferons jamais usage, il nous a paru préférable d'adopter le mode d'exposition qui précède, qui est un peu plus simple que celui de M. Hadamard et qui nous a permis d'établir tous les résultats dont nous aurons à nous servir.

IV. — *Application à l'étude des fonctions méromorphes à coefficients entiers.*

Nous allons donner immédiatement une application des formules qui viennent d'être démontrées.

Nous allons démontrer qu'une fonction, méromorphe dans un cercle de rayon supérieur à l'unité, ne saurait être représentée dans ce cercle par un développement de Taylor à coefficients entiers sans se réduire au quotient de deux polynomes à coefficients entiers (2).

Soit, en effet, un tel cercle. Considérons un cercle de rayon inférieur à celui-là, mais supérieur à l'unité. Soit $\frac{1}{\rho'}$ le rayon de ce cercle. On a

$$\rho' < 1.$$

(1) *Essai sur l'étude des fonctions données par le développement de Taylor* (*Journal de M. Jordan*, 1892).

(2) *Voir* Borel, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1894.

A l'intérieur de ce cercle, la fonction admet les pôles $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_p}$ de modules $\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}, \ldots, \frac{1}{\rho_p}$. Considérons alors un déterminant Δ_n^q et supposons $q > p$. Nous avons établi que, dans ce cas, on avait

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|\Delta_n^q|} \leq \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_p \rho'^{q-p}.$$

Mais ρ' étant inférieur à 1, on peut, quels que soient $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$, donner à q une valeur assez grande pour que l'on ait

$$\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_p \rho'^{q-p} < 1.$$

Dans ces conditions, $\sqrt[n]{|\Delta_n^q|}$ est inférieur à partir d'une certaine valeur de n à un certain nombre inférieur à 1. Il en est de même de $|\Delta_n^q|$. Mais, dans l'hypothèse où nous sommes, $|\Delta_n^q|$ est un nombre entier. Il ne peut donc être que nul.

Il existe donc au moins une valeur de q telle que, pour toute valeur de n supérieure à une valeur déterminée n', on ait

$$\Delta_n^q = 0.$$

Supposons qu'on ait ainsi déterminé q et la valeur n' qui lui correspond. A cette valeur n' correspondent une infinité de valeurs de q jouissant de la même propriété. En effet, si l'on forme Δ_n^{q+1} $(n > n')$, on voit, en développant ce déterminant suivant les éléments de sa dernière colonne, qu'il est une somme de déterminants Δ_n^q où n est supérieur à n'; le déterminant Δ_n^{q+1} est donc nul.

Soit q le plus petit des nombres qui correspondent ainsi à une valeur de n'. Ce n'est plus nécessairement le même que précédemment, c'est-à-dire celui qui nous a servi à déterminer n'.

Je dis que le déterminant Δ_n^{q-1} ne s'annule pour aucune valeur de n supérieure à n'. Considérons en effet le déterminant Δ_n^q :

$$\Delta_n^q = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \ldots & a_{n+q-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n+q-1} & \ldots & \ldots & a_{n+2q-2} \end{vmatrix}.$$

Considérons les mineurs de Δ_n^q relatifs aux quatre éléments extrêmes a_n, a_{n+q-1}, a_{n+2q-2}. Ces mineurs sont respectivement égaux à

$$\Delta_{n+2}^{q-1}, \quad \Delta_{n+1}^{q-1}, \quad \Delta_n^{q-1}.$$

De plus, si l'on enlève à Δ_n^q les quatre lignes et colonnes qui renferment ces éléments, le déterminant restant est évidemment

$$\Delta_{n+2}^{q-2}.$$

Appliquons alors une propriété bien connue des déterminants mineurs; nous aurons

$$\Delta_n^{q-1}\,\Delta_{n+2}^{q-1} - (\Delta_{n+1}^{q-1})^2 = \Delta_n^q\,\Delta_{n+2}^{q-2}.$$

Cela posé, si n est plus grand que n',

$$\Delta_n^q = 0;$$

je dis que Δ_n^{q-1} ne saurait être nul. On aurait en effet, dans ce cas,

$$\Delta_{n+1}^{q-1} = 0,$$

et, en raisonnant de proche en proche, on verrait que

$$\Delta_{n+2}^{q-1} = 0, \qquad \ldots, \qquad \Delta_{n+p}^{q-1} = 0.$$

Changeons, au contraire, n en $n-2$ dans l'identité précédente; il viendra

$$\Delta_{n-2}^{q-1}\,\Delta_n^{q-1} - (\Delta_{n-1}^{q-1})^2 = \Delta_{n-2}^q\,\Delta_n^{q-2}.$$

Si donc on a

$$\Delta_{n-2}^q = 0 \qquad \text{et} \qquad \Delta_n^{q-1} = 0,$$

on en déduit

$$\Delta_{n-1}^{q-1} = 0$$

et de même

$$\Delta_{n-2}^{q-1} = 0, \qquad \ldots.$$

Donc, si pour toute valeur de n supérieure ou égale à n', on a

$$\Delta_n^q = 0,$$

on a

$$\Delta_n^{q-1} = 0$$

pour $n > n'$ dès que ce déterminant est nul pour *une* valeur de n supérieure à n'. De plus, si $\Delta_{n'}^{q-1} = 0$, on a

$$\Delta_n^{q-1} = 0.$$

pour toute valeur de n supérieure à n'. Si donc q est la plus petite valeur telle que $\Delta_n^q = 0$ pour toute valeur de n supérieure ou égale à n', Δ_n^{q-1} ne peut s'annuler pour aucune de ces valeurs de n.

Ceci posé, considérons le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
a_n &= u_1 a_{n+1} + u_2 a_{n+2} + \ldots + u_{q-1} a_{n+q-1},\\
a_{n+1} &= u_1 a_{n+2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_{q-1} a_{n+q},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
a_{n+q-1} &= u_1 a_{n+q} + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_{q-1} a_{n+2q-2}.
\end{aligned}$$

C'est un système de q équations. Considérons les $q-1$ premières. Si n est supposé plus grand que n', ce système a une solution, car son déterminant est Δ_{n+1}^{q-1}, qui est différent de o. Cette solution est d'ailleurs rationnelle en $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+q-1}$. Portons-la dans la dernière équation. Elle sera vérifiée, car le déterminant Δ_n^q est nul. Barrons alors la première équation et ajoutons la suivante :

$$a_{n+q} = u_1 a_{n+q+1} + \ldots + u_{q-1} a_{n+2q-1},$$

elle sera encore vérifiée par les mêmes valeurs des u. En effet, le déterminant Δ_{n+1}^q étant nul, la solution des $q-1$ premières équations du nouveau système (c'est-à-dire la même solution que précédemment) vérifie la $q^{\text{ième}}$ équation. On verra ainsi, de proche en proche, qu'il existe un système *unique* de nombres rationnels $u_1, u_2, \ldots, u_{q-1}$, tels que l'on ait

$$a_n = u_1 a_{n+1} + u_2 a_{n+2} + \ldots + u_{q-1} a_{n+q-1}$$

pour toute valeur de n supérieure ou égale à n'. Il y a donc une loi de récurrence entre q coefficients consécutifs de la série, et l'on en déduit immédiatement que la série est le quotient de deux polynomes à coefficients rationnels ou, en réduisant au même dénominateur, de deux polynomes à coefficients entiers.

Le théorème reste le même si l'on suppose que les coefficients de la série sont des entiers complexes. En effet, on voit encore dans ce cas que, si $|\Delta_n^q|$ est, à partir d'un certain rang, inférieur à 1, cela exige que cette expression soit nulle. Le raisonnement subsiste alors entièrement, à condition de changer le mot *entier* en *entier complexe*.

Nous avons fait, en commençant, la restriction que le cercle de méromorphie de la fonction étudiée est de rayon supérieur à *un*. On peut se demander si cette restriction ne pourrait pas être levée. Il est très facile de montrer que cela est impossible. Étant donnée, en effet, une fonction méromorphe dans un cercle de rayon inférieur à *un*, on peut lui en substituer une autre dont le

développement en série soit à coefficients entiers et qui ait les mêmes singularités que la première à l'intérieur de ce cercle.

Soit, en effet, la fonction

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

dont, pour plus de simplicité, nous supposons les coefficients réels.

Considérons la fonction

$$F(z) = E(a_0) + E(a_1) z + E(a_2) z^2 + \ldots,$$

$E(a)$ désignant la partie entière de a.

La différence des deux fonctions f et F est une série entière, dont tous les coefficients sont inférieurs à *un* en valeur absolue. Il résulte donc immédiatement du théorème de Cauchy-Hadamard que le cercle de convergence de cette série a un rayon supérieur ou égal à *un*. Les fonctions f, F ont donc mêmes singularités dans un cercle quelconque de rayon inférieur à *un*. L'hypothèse qu'une fonction méromorphe dans un cercle de rayon inférieur à *un* est représentée dans ce cercle par une série entière à coefficients entiers n'entraîne donc aucune conséquence.

On peut faire une remarque analogue dans le cas où le développement de Taylor est à coefficients rationnels. Étant donné un développement en série quelconque, on peut lui substituer un développement à coefficients rationnels représentant une fonction ayant mêmes singularités que la première dans tout le plan. Soit, en effet,

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

un développement où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont quelconques. Considérons le développement suivant

$$F(z) = E(a_0) + \frac{E(10 a_1)}{10} z + \ldots + \frac{E(10^{n^2} a_n)}{10^{n^2}} z^n + \ldots$$

obtenu en remplaçant chaque coefficient par son développement décimal avec n^2 chiffres. Je dis que la différence $f(z) - F(z)$ est une fonction entière. En effet, cette différence est une série de puissances, dont chaque coefficient est inférieur à $\frac{1}{10^{n^2}}$. D'après le théorème de Cauchy-Hadamard, la série est convergente dans tout le plan, puisque $\sqrt[n]{b_n} < \frac{1}{10^n}$ tend vers o.

Les coefficients a_0, a_1, ... peuvent être supposés complexes. On prendra alors pour numérateurs des coefficients de $F(z)$ la somme des parties entières de $10^{n^2}\alpha_n$ et $10^{n^2}\beta_n$ en posant $a_n = \alpha_n + \beta_n i$. Le coefficient de z^n dans $f(z) - F(z)$ sera inférieur en module à $\frac{2}{10^{n^2}}$ et les conclusions subsisteront.

Donc, on peut pour l'étude des singularités, au moyen du développement de Taylor, se borner au cas où les coefficients sont rationnels. On peut même supposer que les dénominateurs sont des puissances de 10 sans diminuer la généralité.

Nous avons démontré qu'une fonction méromorphe, dans un cercle de rayon plus grand que 1, ne saurait être représentée dans ce cercle par une série de Taylor à coefficients entiers. Cherchons si l'on peut la représenter par une série de la forme

$$f(z) = \sum \frac{b_n}{c_n} z^n,$$

où b_n, c_n sont des nombres entiers. Supposons que le développement de c_n en facteurs premiers comprenne un nombre limité de facteurs $p_1, p_2, \ldots, p_h$ et supposons de plus qu'il existe un nombre fixe M tel que l'on ait constamment

$$c_n < M^n.$$

Dans ces conditions, le développement précédent ne peut représenter une fonction méromorphe.

Déterminons, en effet, un nombre entier λ_i tel que

$$p_i^{\lambda_i} > M.$$

On en déduit

$$c_n < p_i^{n\lambda_i}.$$

Posons alors

$$z = y \cdot p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_h^{\lambda_h},$$

$f(z)$ deviendra une fonction méromorphe de y à coefficients entiers. On en conclut qu'il est impossible qu'un tel développement représente une fonction méromorphe dans un cercle de rayon

$$R = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_h^{\lambda_h}$$

et *a fortiori* une fonction méromorphe dans tout le plan.

On ne peut pas considérer ce résultat comme une généralisation de l'impossibilité du développement à coefficients entiers, à cause de la limitation que nous avons imposée à c_n. Il est, en effet, facile de montrer que, si l'on suppose que, pour des valeurs de n assez grandes, on ait

$$c_n > M^n,$$

quel que soit le nombre fixe M, on retombe sur les fonctions les plus générales.

En effet, une fonction quelconque peut toujours se mettre sous la forme

$$\sum \frac{b_n}{c_n} z^n,$$

où c_n est un nombre entier vérifiant la condition précédente. On voit de suite que la série

$$\sum \frac{b_n - E(b_n)}{c_n} z^n$$

définit une fonction entière. En d'autres termes, les deux fonctions

$$\sum \frac{b_n}{c_n} z^n \quad \text{et} \quad \sum \frac{E(b_n)}{c_n} z^n$$

ont les mêmes singularités.

Il y a donc peu de généralisations à chercher du théorème précédemment démontré. Il serait cependant intéressant d'étudier les cas intermédiaires entre ceux que nous venons d'examiner, où $\sqrt[n]{c_n}$ avait pour limite soit o, soit l'infini. Il pourrait être aussi intéressant d'étudier le cas où le nombre de facteurs premiers de c_n n'est plus limité. Nous n'entrerons pas plus profondément dans l'étude de ces généralisations.

V. — *Zéros des fonctions entières.*

Nous allons indiquer une application très importante des résultats de M. Hadamard : c'est la recherche des zéros des fonctions entières.

Le principe de la méthode que nous allons suivre est dû à

Cauchy. Dans son *Cours d'Analyse* de l'École Polytechnique il fait la remarque suivante : Étant donné un polynome, si l'on développe en série de Taylor l'inverse de ce polynome ou sa dérivée logarithmique, le rayon de convergence de cette série donne le module de celle des racines du polynome qui a le plus petit module.

La méthode de Cauchy a été reprise par M. Runge et plus récemment par M. Hadamard (¹) dans un Mémoire couronné. Nous allons indiquer les résultats de ce dernier en modifiant légèrement la méthode de calcul qu'il a employée.

Soit une fonction entière

$$G(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots.$$

Supposons essentiellement $c_0 \neq 0$ (la chose est évidemment toujours possible) et développons en série l'inverse de la fonction $G(z)$. On aura

$$\frac{1}{G(z)} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots.$$

Cette dernière fonction est méromorphe et ses pôles sont les zéros de $G(z)$. Nous allons, pour déterminer ces pôles, nous servir des résultats précédemment établis.

Calculons d'abord les coefficients a_0, a_1, ... On a manifestement les équations

$$\begin{aligned}
&a_0 c_0 = 1,\\
&a_0 c_1 + a_1 c_0 = 0,\\
&a_0 c_2 + a_1 c_1 + a_2 c_0 = 0,\\
&a_0 c_3 + a_1 c_2 + a_2 c_1 + a_3 c_0 = 0,\\
&a_0 c_4 + a_1 c_3 + a_2 c_2 + a_3 c_1 + a_4 c_0 = 0,\\
&a_0 c_5 + a_1 c_4 + a_2 c_3 + a_3 c_2 + a_4 c_1 + a_5 c_0 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,\\
&a_0 c_p + a_1 c_{p-1} + a_2 c_{p-2} + \ldots\ldots + a_p c_0 = 0.
\end{aligned}$$

La première équation donne a_0, la deuxième a_1, etc., et il n'y a jamais d'impossibilité puisque $c_0 \neq 0$.

(¹) RUNGE, *Acta mathematica*, t. VI, p. 305. — HADAMARD, *Étude sur les propriétés des fonctions entières, etc.* (*Journal de M. Jordan*, 1893).

Nous allons avoir à considérer des déterminants dont le calcul se ramènera à celui des déterminants Δ_m^p des paragraphes précédents. Pour montrer nettement la marche du calcul étudions d'abord un cas simple. Parmi les équations précédentes prenons-en quatre successives, à partir de la troisième, et considérons le déterminant des a dans ces équations. Ce déterminant est

$$D = \begin{vmatrix} c_2 & c_1 & c_0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 \\ c_4 & c_3 & c_2 & c_1 \\ c_5 & c_4 & c_3 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Multiplions les éléments des colonnes successives par a_0, a_1, a_2, a_3 et ajoutons à la première colonne. Nous aurons

$$a_0 D = \begin{vmatrix} 0 & c_1 & c_0 & 0 \\ 0 & c_2 & c_1 & c_0 \\ -a_4 c_0 & c_3 & c_2 & c_1 \\ -a_4 c_1 - a_5 c_0 & c_4 & c_3 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Multiplions encore les éléments des deuxième, troisième et quatrième colonnes par a_0, a_1, a_2, et ajoutons à la deuxième; il vient

$$a_0^2 D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & c_0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & c_0 \\ -a_4 c_0 & -a_3 c_0 & c_2 & c_1 \\ -a_4 c_1 - a_5 c_0 & -a_3 c_1 - a_4 c_0 & c_3 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant du quatrième ordre se réduit au produit de deux déterminants du second ordre dont l'un est c_0^2. Quant à l'autre, il est égal à

$$\begin{vmatrix} a_4 c_0 & a_3 c_0 \\ a_4 c_1 + a_5 c_0 & a_3 c_1 + a_4 c_0 \end{vmatrix}.$$

Si l'on multiplie par $\frac{c_1}{c_0}$ la première ligne et qu'on retranche de la deuxième, on voit que le déterminant $a_0^2 D$ se réduit au produit de c_0^2 par le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_4 & a_3 \\ a_5 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Or ce dernier déterminant est opposé au déterminant

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ a_4 & a_5 \end{vmatrix} = \Delta_3^2.$$

Par suite, on a l'égalité

$$a_0^2 \mathrm{D} = - c_0^4 \Delta_3^2,$$

que nous allons généraliser.

Considérons à cet effet la $\overline{p+1}^{\text{ième}}$ équation (celle qui, la première, contient c_p) et les $p+m$ suivantes. Le déterminant des a dans ces équations est

$$\mathrm{D}_m^p = \begin{vmatrix} c_p & c_{p-1} & c_{p-2} & \ldots & c_2 & c_1 & c_0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ c_{p+1} & c_p & c_{p-1} & \ldots & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{p+m} & c_{p+m-1} & c_{p+m-2} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & c_1 & c_0 \\ c_{p+m+1} & c_{p+m} & c_{p+m-1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & c_2 & c_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{2p+m} & c_{2p+m-1} & c_{2p+m-2} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & c_{p+1} & c_p \end{vmatrix}.$$

Nous allons lui faire subir des transformations analogues à celles que nous avons employées tout à l'heure : Multiplions par $a_0, a_1, \ldots, a_{m+p}$ les diverses colonnes de ce déterminant et ajoutons à la première colonne les produits obtenus. En vertu des équations que vérifient les a, la première colonne commencera par $m+1$ zéros.

Le déterminant devient

$$a_0 \mathrm{D}_m^p = \begin{vmatrix} 0 & c_{p-1} & \ldots \\ 0 & c_p & \ldots \\ . & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots \\ -a_{m+p+1} c_0 & \ldots & \ldots \\ -a_{m+p+1} c_1 - a_{m+p+2} c_0 & \ldots & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{m+p+1} c_{p-1} - a_{m+p+2} c_{p-2} - \ldots - a_{m+2p} c_0 & c_{2p+m-1} & \ldots \end{vmatrix}.$$

Multiplions par $a_0, a_1, \ldots, a_{m+p-1}$ la deuxième, la troisième, etc., la dernière colonne de ce déterminant et ajoutons à la deuxième colonne. Le déterminant est de nouveau multiplié par a_0; la

deuxième colonne seule change et devient

$$\begin{array}{l} \quad\; 0 \\ \quad\; 0 \\ \quad\; . \\ \quad\; 0 \\ -a_{m+p}c_0 \\ -a_{m+p}c_1 - a_{m+p+1}c_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -a_{m+p}c_{p-1} - a_{m+p+1}c_{p-2} - \dots - a_{m+2p-1}c_0. \end{array}$$

Répétons ainsi p fois cette opération. Le nouveau déterminant sera égal à

$$a_0^p D_m^p.$$

D'autre part, nous aurons fait apparaître, dans chacune des $m+1$ premières lignes, p zéros. Le déterminant obtenu sera de la forme

$$\left|\begin{array}{cccc:ccccc} \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hspace{6em}}^{p.}} & \multicolumn{5}{c}{\overbrace{\hspace{12em}}^{m+1.}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_1 & c_0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . & .. & .. & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{p-1} & c_{p-2} & . & \dots & c_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & c_p & c_{p-1} & & \dots & c_1 \\ & & H & & .. & \dots & & \dots & .. \\ & & & & c_{m+p} & c_{m+p-1} & & \dots & c_p \end{array}\right|.$$

Il se réduit donc, au signe près, au produit de H par le déterminant d'ordre $m+1$ qui est dans l'angle supérieur de droite. Ce déterminant ayant pour valeur c_0^{m+1}, on en déduit l'égalité

$$a_0^p D_m^p = \pm c_0^{m+1} H.$$

Calculons la valeur absolue de H.

C'est la même que celle du déterminant suivant :

$$\left|\begin{array}{llll} a_{p+m+1}c_0 & a_{p+m}c_0 & \dots & a_{m+2}c_0 \\ a_{p+m+1}c_1 + a_{p+m+2}c_0 & a_{p+m}c_1 + a_{p+m+1}c_0 & \dots & a_{m+2}c_1 + a_{m+3}c_0 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots \\ a_{p+m+1}c_{p-1} + \dots + a_{m+2p}c_0 & a_{p+m}c_{p-1} + \dots + a_{m+2p-1}c_0 & \dots & a_{m+2}c_{p-1} + \dots + a_{m+p+1}c_0 \end{array}\right|$$

Si l'on multiplie par $\frac{c_1}{c_0}$ les éléments de la première ligne et qu'on retranche les résultats des éléments de la seconde, on voit que le terme en c_1 disparaît dans chacun des éléments de cette seconde ligne. On fera disparaître de même tous les termes qui ont en facteur le coefficient c avec un indice différent de o et après cette réduction le déterminant se réduit à

$$c_0^p \begin{vmatrix} a_{p+m+1} & a_{p+m} & \cdots & a_{m+2} \\ a_{p+m+2} & a_{p+m+1} & \cdots & a_{m+3} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{m+2p} & a_{m+2p-1} & \cdots & a_{m+p+1} \end{vmatrix}$$

qui est au signe près égal à $c_0^p \Delta_{m+2}^p$.

On a donc l'égalité

$$a_0^p \mathrm{D}_m^p = \pm c_0^{m+p+1} \Delta_{m+2}^p.$$

Nous ne nous sommes pas préoccupés du signe à prendre dans le second membre. Il est facile de le déterminer, mais nous négligerons ce détail, car ce qui nous intéresse principalement c'est le module de chacun des deux membres. Contentons-nous donc d'indiquer le résultat qui est le suivant :

$$a_0^p \mathrm{D}_m^p = (-1)^{mp+\frac{p(p-1)}{2}} c_0^{m+p+1} \Delta_{m+2}^p.$$

Nous sommes conduits à chercher la limite de la racine $m+2^{\text{ième}}$ des deux membres. Cette limite est évidemment la même que celle de la racine $m^{\text{ième}}$. Nous savons que, si $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ sont les modules des inverses des racines cherchées, on a

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|\Delta_{m+2}^p|} = \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_p.$$

On en déduit, en remarquant que p est un nombre fixe, que

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|\mathrm{D}_m^p|} = |c_0| \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_p.$$

C'est le principal résultat que nous avions en vue d'établir.

Ce qui est surtout important, c'est d'étudier le produit $\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_p$ quand p devient très grand. On n'a jamais, jusqu'à présent, fait d'applications *précises* du résultat précédent; on s'est toujours contenté, ce qui est fort important dans les applications, de chercher, dans des cas déterminés, une limite supérieure

du module du déterminant D. Au sujet des applications de ce genre, nous ferons une remarque relative au nombre de termes du déterminant D. En apparence il en renferme $\overline{m+p+1}\,!$; mais en réalité ce nombre doit être diminué à cause des éléments nuls : la première ligne renferme seulement $p+1$ termes non nuls. Le nombre de termes sera égal au produit de $p+1$ par le nombre de termes du mineur relatif à un de ces éléments. Or, pour obtenir ce mineur, on supprime une colonne ne contenant pas de zéros. La première ligne du mineur renfermera encore $p+1$ éléments non nuls. En continuant ainsi $m+1$ fois nous voyons que le nombre de termes est

$$(p+1)^{m+1} \times h,$$

h étant le nombre de termes d'un certain mineur d'ordre p, qui ne contient plus d'éléments nuls. Le nombre des termes du déterminant D_m^p est donc

$$(p+1)^{m+1} p\,! = (p+1)^m (p+1)!.$$

Il en résulte que la racine $m^{\text{ième}}$ de ce nombre de termes a pour limite le nombre fini $p+1$. Si donc nous connaissons le maximum du module d'un terme du déterminant, nous ne serons nullement gênés par le nombre des termes du déterminant dans la limitation que nous en tirerons pour le module du déterminant lui-même.

Application. — Pour donner une idée du genre de calcul auquel donne lieu l'application du résultat que nous avons obtenu, considérons l'équation

$$e^x - P(x) = 0,$$

P étant un polynome en x.

La fonction entière

$$G(x) = e^x - P(x)$$

a les mêmes coefficients que la fonction e^x, sauf les premiers qui diffèrent. Mais, pour des valeurs de h supérieures au degré de P, on a certainement

$$c_h = \frac{1}{h!}.$$

Dans le calcul du module maximum de D_m^p, c'est cette valeur de c_h qu'il faut introduire et nous prévoyons dès lors que la limite maximum que nous allons obtenir pour $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ sera très éloignée de la vérité, puisque l'équation $e^x = 0$ que nous substituons en somme à la précédente n'a pas de racine.

Je dis que le plus grand terme du déterminant D_m^p relatif à e^x est le terme principal. C'est en effet le seul qui ne contienne pas au moins deux éléments pris de part et d'autre de la diagonale principale. Considérons alors un autre terme et soient c_h et c_k deux éléments de ce terme pris de part et d'autre de la diagonale principale. Je dis qu'on peut remplacer ces éléments par deux autres, de manière à obtenir un terme plus grand du déterminant. Considérons en effet les deux autres sommets du rectangle qui a $c_h c_k$ pour diagonale. Soient $c_{h'}$, $c_{k'}$ ces sommets (*voir* le Tableau ci-dessous) :

$$\begin{matrix} c_{h'} & \ldots & c_k \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_h & \ldots & c_{k'} \end{matrix}$$

Je dis que

$$c_{h'} c_{k'} > c_h c_k.$$

Remarquons en effet que l'on a

$$h - h' = k - k' > 0,$$

et il faut démontrer que l'on a

$$h'!\, k'! < h!\, k!$$

ou

$$\frac{h!\, k!}{h'!\, k'!} > 1;$$

or cette expression est égale à

$$\frac{h(h-1)\ldots(h'+1)}{k'(k'-1)\ldots(k+1)}.$$

Le nombre des facteurs est le même au numérateur et au dénominateur; chacun des facteurs du numérateur est supérieur à celui du dénominateur qui est écrit au dessous ($h > k'$). Cette fraction est donc bien plus grande que 1 et il en résulte bien que le terme principal est le plus grand. Sa valeur est

$$c_p^{m+p+1}.$$

La racine $m^{\text{ième}}$ du nombre des termes du déterminant tendant vers $p+1$, il en résulte que l'on a

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \sqrt[m]{|D_m^p|} < \frac{p+1}{p!}.$$

Soient $r_1, r_2, \ldots, r_p$ les modules des racines. Comme on a

$$r_1, r_2, \ldots, r_p = \frac{c_0}{\overline{\lim} \sqrt[m]{|D_m^p|}},$$

on en déduit

$$r_1, r_2, \ldots, r_p > \frac{p!}{p+1}.$$

Au lieu de considérer la fonction e^x, nous pouvons considérer la fonction ke^x. Le calcul sera le même; il suffira seulement d'introduire une certaine puissance de k : cette puissance est la $\overline{m+p+1}^{\text{ième}}$, puisque tous les coefficients sont multipliés par k. La limite de sa racine $m^{\text{ième}}$ est k, mais comme c_0 est aussi multiplié par k, il n'y a rien de changé au résultat.

Mais on peut évidemment choisir k de manière que ke^x soit une fonction majorante de $e^x - P(x)$, ce que nous écrirons suivant une notation due à M. Poincaré :

$$e^x - P(x) \ll ke^x.$$

Le résultat précédent s'applique donc à $e^x - P(x)$ (et en général à toute fonction qui admet pour majorante ke^x). Par suite, si $r_1, r_2, \ldots, r_p$ sont les modules des p premières racines de $e^x - P(x) = 0$, on a

$$r_1 r_2 \ldots r_p > \frac{p!}{p+1},$$

et puisque $r_1 < r_2 < \ldots < r_p$, on en déduit

$$r_p^p > \frac{p!}{p+1}.$$

Donc

$$r_p > \sqrt[p]{\frac{p!}{p+1}}.$$

Or on démontre, dans la théorie de la fonction Γ, que $\sqrt[p]{p!}$ est égal à $\frac{p}{e}(1+\varepsilon)$, ε tendant vers zéro lorsque p augmente indéfiniment. On voit donc en résumé que, en désignant par h une cer-

taine constante indépendante de p, on a

$$r_p > hp.$$

Cette formule peut être envisagée à deux points de vue différents : on peut considérer, soit qu'elle donne une valeur minimum du module de la $p^{\text{ième}}$ racine en fonction de p, soit au contraire qu'elle limite supérieurement le nombre des racines à l'intérieur d'un cercle de rayon r. Ce nombre p est certainement inférieur à $\frac{r}{h}$, puisque, dans ce cercle, on a $r_p < r$. Ce qui paraît plus difficile, c'est de savoir si cette limite supérieure est réellement atteinte ou si l'on s'en rapproche plus ou moins. Cette étude semble au premier abord assez difficile, puisqu'elle exige un calcul plus précis de la valeur du déterminant D_m^p, calcul qui n'est pas sans présenter de sérieuses difficultés.

CHAPITRE III.

LE THÉORÈME DE M. PICARD.

Le but de ce Chapitre est d'étendre aux fonctions méromorphes un théorème important relatif aux fonctions entières que son auteur énonçait de la manière suivante [1] :

Étant donnée une fonction entière $G(z)$ *et deux constantes distinctes* a *et* b, *si les deux équations*

$$G(z) = a,$$
$$G(z) = b,$$

sont dépourvues de racines, la fonction se réduit à une constante.

Nous avons étudié ce théorème avec les généralisations qu'il comporte dans nos *Leçons sur les fonctions entières*. Nous allons étendre aux fonctions méromorphes à la fois le théorème et ses généralisations.

I. — *Degrés d'infinitude.*

Auparavant, nous rappellerons succinctement certaines notions fondamentales relatives aux fonctions entières et à leur croissance. Les résultats dont nous avons besoin ont été démontrés et étudiés en détail dans nos *Leçons sur les fonctions entières*. Dans un Mémoire récent, M. Lindelöf a retrouvé, par une voie plus rapide, la plupart de ces résultats. Nous indiquerons brièvement la manière dont il les établit.

Nous nous servirons aussi constamment de la définition du degré

---

[1] *Annales de l'École Normale,* 1880. *Voir* une démonstration directe dans la première Note des *Leçons sur les fonctions entières,* par E. Borel, Gauthier-Villars, 1900.

d'infinitude qui a été développée avec quelques détails dans nos *Leçons sur les séries à termes positifs*. Rappelons succinctement ce dont il s'agit.

Il est naturel de bâtir, à côté de la théorie des infiniment petits, une théorie analogue relative aux infiniment grands. Plus généralement, lorsqu'une expression $z(x)$ tend vers une limite b lorsque x tend vers a, si l'on veut étudier la manière dont elle tend vers cette limite, il est assez naturel de former le quotient

$$\frac{(z-b)}{(x-a)^{\alpha}}$$

et de chercher s'il existe un nombre α tel que cette expression tende vers une limite; l'existence de ce nombre n'est rien moins qu'évidente, et l'on pourrait par suite croire, *a priori*, que cette notion manque de généralité. Mais l'observation des faits montre que, dans les cas les plus fréquents à la fois et les plus importants, le nombre α existe effectivement, de sorte que la théorie a de très nombreuses applications, ce qui légitime l'importance qu'on lui accorde.

Donc, pour étudier la croissance d'une fonction $y(x)$ qui croît indéfiniment avec la variable x, nous la comparerons à la fonction x^{α}. Si le quotient $\frac{y}{x^{\alpha}}$ tend vers une limite, quand x croît indéfiniment, nous dirons que α est le *degré d'infinitude* de la fonction. Il est nécessaire, pour que ce degré existe, que $\frac{\log y}{\log x}$ tende vers une limite. La condition n'est pas suffisante. Néanmoins, lorsqu'un infiniment grand n'est pas d'un degré déterminé, nous distinguerons deux cas, suivant que $\frac{\log y}{\log x}$ tend ou non vers une limite. Dans le premier cas, nous dirons que y est de degré (α) (qui s'énonce α parenthèses) si α est la limite de $\frac{\log y}{\log x}$. Nous exclurons au contraire complètement le second. Le premier cas se présente également dans la théorie des infiniment petits et il avait été considéré par Cauchy. Mais, depuis, ce cas singulier avait été laissé de côté.

La fonction e^x a, d'après notre définition, un degré infini. Nous désignerons son degré par le symbole ω. L'introduction de ce

symbole sera très utile pour caractériser les fonctions dont la croissance est analogue à celle de l'exponentielle. Nous n'entrerons pas dans le détail des calculs à effectuer sur le symbole ω. Rappelons simplement que la multiplication par ω n'est pas commutative : e^{x^α} est de degré $\omega\alpha$; $e^{\alpha x}$, au contraire, sera de degré $\alpha\omega$. Enfin, on désigne encore par $\frac{1}{\omega}$ le degré de $\log x$, et on légitime l'emploi de ce symbole en remarquant que $x = \log e^x$ est de degré $\frac{1}{\omega}\omega$, et que, par suite, on a bien

$$\frac{1}{\omega}\omega = 1.$$

De même

$$e^{\log x} = x$$

est de degré $\omega\frac{1}{\omega}$; on a donc aussi

$$\omega\frac{1}{\omega} = 1.$$

Rappelons maintenant brièvement les principales propositions dont nous aurons à faire usage. Elles trouvent leur origine dans un court Mémoire de M. Poincaré [1], où est établie une relation étroite entre la grandeur d'une fonction entière et son genre.

Considérons une fonction entière de genre p

$$f(z) = e^{Q(z)}\prod\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{z^p}{pa_n^p}},$$

la série $\sum \frac{1}{|a_n|^{p+1}}$ étant convergente. M. Poincaré a démontré qu'en posant $|z| = r$ on a, quel que soit le nombre positif α,

$$\lim f(z)e^{-\alpha r^{p+1}} = 0$$

quand r croît indéfiniment.

Si nous désignons par $M(r)$ le module maximum de la fonction pour $|z| = r$ [2] (et par suite pour $|z| \leqq r$), nous pourrons dire que l'on a, pour r assez grand,

$$M(r) < e^{\alpha r^{p+1}},$$

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique*, 1883.

[2] Nous ferons désormais usage d'une manière constante de cette notation.

ce qui établit déjà une relation entre l'ordre de grandeur de la fonction et son genre. Nous ne démontrerons pas cette propriété. On peut d'ailleurs établir une inégalité plus précise en introduisant l'exposant de convergence de la suite des zéros, c'est-à-dire un nombre ρ tel que des deux séries

$$\sum \frac{1}{|a_n|^{\rho-\varepsilon}}, \qquad \sum \frac{1}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}}$$

la première diverge et la deuxième converge, quelque petit que soit le nombre positif ε (¹). Ce nombre ρ est compris évidemment entre p et $p+1$.

Nous avons démontré dans le Chapitre III des *Leçons sur les fonctions entières* que, quelque petit que soit le nombre positif ε, on a, pour des valeurs assez grandes de r,

$$M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}}.$$

C'est ce nombre ρ que nous appellerons *ordre* de la fonction entière. Deux cas sont alors à distinguer : 1° si la série $\sum \frac{1}{|a_n|^\rho}$ diverge, nous dirons que l'*ordre* ρ est *par défaut*. On aura l'inégalité ci-dessus; 2° si la série $\sum \frac{1}{|a_n|^\rho}$ converge, nous pourrons affirmer que l'on a

$$M(r) < e^{\varepsilon r^\rho},$$

quelque petit que soit le nombre ε; ρ est dit alors *ordre par excès*.

Nous allons retrouver ces deux inégalités par la méthode de M. Lindelöf.

II. — *Théorèmes sur l'ordre.*

Considérons un facteur primaire d'une fonction de genre p que nous écrirons sous la forme

$$Q_p(u) = (1-u)e^{u+\frac{u^2}{2}+\ldots+\frac{u^p}{p}}.$$

(¹) Cela revient à dire que le module d'un zéro a pour degré d'infinitude $\left(\frac{1}{\rho}\right)$.

Nous allons démontrer que l'on a

$$|Q_p(u)| < e^{A|u|^\tau},$$

τ étant un nombre quelconque compris entre p et $p+1$ mais essentiellement distinct de o, et A étant une constante complètement déterminée lorsque l'on donne τ.

Supposons, en effet, $|u| < 1$, on a

$$Q_p(u) = e^{\log(1-u)+u+\frac{u^2}{2}+\ldots+\frac{u^p}{p}} = e^{-\frac{u^{p+1}}{p+1}+\ldots}.$$

Donc

$$|Q_p(u)| < e^{|u|^{p+1}+\ldots} < e^{2|u|^{p+1}} \leqq e^{2|u|^\tau},$$

puisque $\tau \leqq p+1$ et que $|u| < 1$.

Si $|u|$ croît indéfiniment, $|u|^\tau$ croît plus vite que $|u|^p$. L'inégalité est donc certainement vérifiée à partir d'une certaine valeur h de $|u|$. Reste à démontrer l'inégalité pour $|u|$ compris entre 1 et h. On remarquera qu'entre ces limites l'expression

$$\frac{\log|Q_p(u)|}{\log e^{|u|^\tau}}$$

reste comprise entre deux limites déterminées. On peut donc trouver un nombre A tel que

$$\log|Q_p(u)| < A|u|^\tau$$

et alors l'inégalité sera bien vérifiée.

Considérons maintenant un produit canonique de facteurs primaires

$$F(z) = \prod_{n=1}^{n=\infty} Q_p\left(\frac{z}{a_n}\right),$$

F est une fonction entière de genre p. Considérons en outre un nombre τ tel que la série de terme général $\frac{1}{|a_n|^\tau}$ converge, et supposons τ compris entre p et $p+1$ différent de o. Décomposons le produit en deux facteurs

$$F(z) = \prod_1^h \times \prod_{h+1}^\infty.$$

On a, d'après ce qui précède,

$$\left|\prod_{h+1}^{\infty} Q_p\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| < e^{A\left[\left|\frac{z}{a_{h+1}}\right|^{\tau}+\left|\frac{z}{a_{h+2}}\right|^{\tau}+\ldots\right]}.$$

La série qui figure en exposant étant par hypothèse convergente, on pourra toujours supposer h assez grand pour que

$$A\sum_{h+1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|^{\tau}} < \varepsilon,$$

et cela quel que soit le nombre positif donné ε. La deuxième partie du produit est donc inférieure à $e^{\varepsilon r^{\tau}}$ en posant $r = |z|$. Je dis que, pour r assez grand, on peut supposer que le premier facteur est aussi inférieur à la même expression. La chose est évidente : En effet, z entre en exposant à une puissance p inférieure à τ (¹).

On aura donc, pour r assez grand,

$$|F(z)| < e^{2\varepsilon r^{\tau}},$$

quelque petit que soit choisi le nombre ε.

Soit alors ρ l'exposant de convergence de la suite des zéros. Nous distinguerons deux cas :

1° La série $\frac{1}{|a_n|^{\rho}}$ converge. On peut prendre $\rho = \tau$ et l'on a

$$|F(z)| < e^{\varepsilon r^{\rho}},$$

quel que soit ε.

2° La série $\frac{1}{|a_n|^{\rho}}$ diverge. Elle converge alors pour $\tau = \rho + \eta$, quelque petit que soit η, et l'on peut écrire

$$|F(z)| < e^{r^{\rho+\varepsilon}}.$$

Ce sont les inégalités que nous voulions obtenir.

Soit alors ρ' un nombre tel que, à partir d'une certaine valeur de r, on ait constamment

$$e^{r^{\rho'-\varepsilon}} < M(r) < e^{r^{\rho'+\varepsilon}},$$

(¹) p est inférieur et non égal à τ, car, sans cela, la série $\frac{1}{|a_n|^{p}}$ convergerait et la fonction serait de genre $p - 1$.

quelque petit que soit le nombre positif ε (¹). On sera assuré que

$$\rho' \geqq \rho,$$

car la série

$$\sum \frac{1}{|a_n|^{\rho'+2\varepsilon}}$$

converge certainement et, de plus, ε est arbitraire.

En second lieu, nous avons à rappeler une relation entre l'ordre de grandeur de $f(z)$ et de ses coefficients. Nous nous bornerons à énoncer le fait suivant : pour une valeur donnée de r il y a un terme du développement taylorien de la fonction tel que, en le prenant pour valeur approchée de la fonction, on commet une erreur très faible. Ce terme est naturellement le plus grand de tous.

Enfin, rappelons encore un théorème dont le principe est dû à M. Hadamard, relatif au minimum d'une fonction entière d'ordre ρ. On trouvera la démonstration de l'énoncé plus général que nous allons donner au Chapitre IV des *Leçons sur les fonctions entières*.

On ne peut évidemment pas espérer trouver un minimum valable dans tout le plan, ni même à partir d'une certaine valeur de $|z|$, puisqu'une fonction entière a, en général, des zéros dont les modules croissent indéfiniment. Mais M. Hadamard a montré l'existence de cercles de rayons indéfiniment croissants et sur chacun desquels on peut fixer un minimum du module de la fonction et nous avons, dans les *Leçons* citées, précisé les valeurs possibles pour les rayons de ces cercles.

Excluons du plan toutes les couronnes circulaires obtenues de la manière suivante : si r_n est le module d'un zéro, nous tracerons de l'origine comme centre les deux cercles de rayon $r_n - 1$, $r_n + 1$ et nous exclurons la couronne comprise entre ces deux cercles. Le théorème de M. Hadamard généralisé consiste alors en ce que, en dehors de la région ainsi exclue, on a

$$|f(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}} \qquad (|z| = r).$$

On voit que ce minimum est inverse du maximum trouvé tout à l'heure.

Ce qu'il importe d'observer surtout, c'est que la région exclue du plan est infiniment petite par rapport à celle que l'on conserve.

(¹) Cela revient à dire que $M(r)$ est de degré $\omega(\rho')$.

Il en résulte que, si l'on considère simultanément un nombre limité de fonctions, il existera pour l'ensemble de ces fonctions une infinité de cercles de rayons indéfiniment croissants sur lesquels le théorème pourra s'appliquer. Nous avons développé ces considérations au Chapitre déjà cité. Nous avons tenu à les rappeler succinctement à cause de leur importance.

III. — *Le théorème de M. Picard.*

Ce théorème, rappelé au début du Chapitre, est relatif au nombre de racines d'une équation

$$F(z) = a,$$

où $F(z)$ est une fonction entière et a une constante. Remarquons tout de suite qu'on ne peut espérer avoir une réciproque complète des propositions relatives aux relations entre l'ordre d'une fonction entière et le nombre de ses zéros. Si, en effet, pour un polynome, le nombre des racines est une fonction bien déterminée de son degré, il n'en est plus de même pour une fonction entière. Il existe des fonctions entières d'ordre aussi élevé qu'on veut et dépourvues de zéros. $G(z)$ étant une fonction entière quelconque, $e^{G(z)}$ sera aussi une fonction entière et elle n'a pas de zéros.

Nous allons maintenant rappeler l'énoncé du théorème de M. Picard relatif aux fonctions méromorphes. Nous généraliserons ensuite ce théorème ainsi que celui qui est relatif aux fonctions entières.

Soit $G(z)$ une fonction méromorphe; si les trois équations

$$G(z) = a,$$
$$G(z) = b,$$
$$G(z) = c,$$

où a, b, c sont trois constantes distinctes, ont chacune un nombre limité de zéros, $G(z)$ se réduit à une fraction rationnelle [1].

Nous appellerons *équations exceptionnelles* celles qui ont un nombre limité de zéros. Les théorèmes précédents expriment donc

---

[1] Le premier théorème est un cas particulier de celui-ci. Dire en effet que l'équation $G(z) = \infty$ a un nombre limité de zéros, c'est dire que $G(z)$ est le quotient d'une fonction entière par un polynome.

que le nombre des équations exceptionnelles est au plus 1 pour les fonctions entières, 2 pour les fonctions méromorphes.

Nous allons démontrer ces théorèmes et les généraliser de deux manières différentes : nous montrerons d'abord qu'il y a en général une infinité de zéros *d'un ordre déterminé,* sauf pour un certain nombre d'équations que nous appellerons *équations exceptionnelles;* de telles équations pourront avoir une infinité de zéros, cette infinité n'étant pas du même ordre que pour les équations non exceptionnelles. En second lieu, nous prendrons pour a, b, c, non plus des constantes ou des polynomes, mais des fonctions entières d'ordre inférieur à la proposée.

Commençons par quelques considérations générales. Soit $G(z)$ une fonction entière pour laquelle on connaît la fonction $M(r)$ de degré d'infinitude $\omega(\rho)$. On sait que l'exposant de convergence ρ' de la suite de ses zéros est inférieur ou égal à ρ. Formons, au moyen de ces zéros, un produit canonique de facteurs primaires, soit

$$G_1(z) = \prod \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \ldots + \frac{z^p}{p a_n^p}}.$$

Alors le quotient $\frac{G(z)}{G_1(z)}$ sera une fonction entière dépourvue de zéros. On pourra donc poser

$$G(z) = e^{Q(z)} G_1(z),$$

$Q(z)$ étant une fonction entière. Mais il existe des cercles de rayons indéfiniment croissants sur lesquels $|G_1(z)|$ est supérieur à $e^{-r^{\rho'+\varepsilon}}$ et, *a fortiori,* à $e^{-r^{\rho+\varepsilon}}$. Comme $|G(z)|$ sur ces mêmes cercles doit être inférieur à $e^{+r^{\rho+\varepsilon'}}$, on voit que l'on doit avoir

$$e^{Q(z)} < e^{r^{\rho+\eta}},$$

η étant très petit. Il en résulte bien manifestement que $Q(z)$ est un polynome de degré ρ au plus et il se présente naturellement deux cas, suivant que ρ est ou non entier.

Si ρ n'est pas entier, $Q(z)$ est au plus de degré $q = E(\rho)$. Mais alors le second membre croît au plus aussi vite que

$$e^{r^q} e^{r^{\rho'+\varepsilon}},$$

et comme le premier croît au moins aussi vite que

$$e^{r^{\rho-\varepsilon'}},$$

on voit sans peine que l'on doit avoir

$$\rho = \rho'.$$

Si maintenant ρ est entier, le polynome $Q(z)$ peut être de degré ρ, et le raisonnement précédent est en défaut. Rien n'empêche alors de supposer que $G_1(z)$ est d'ordre inférieur à ρ, ou même que la suite des zéros est à croissance irrégulière.

Abordons alors la démonstration du théorème de M. Picard, et commençons par un cas simple, celui où a et b seraient des fractions rationnelles en prenant l'expression : *équation exceptionnelle* dans son sens restreint. Considérons l'équation

$$G(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

P et Q étant deux polynomes. On a, par suite, pour toutes les racines de cette équation,

$$G(z)\,Q(z) - P(z) = 0.$$

Le premier membre de cette équation est une fonction entière qui est évidemment d'ordre ρ, car P et Q n'influent certainement pas sur cet ordre. Elle aura donc, en général, une infinité de zéros, dont le nombre sera de degré $\left(\frac{1}{\rho}\right)$. Supposons que ce soit une équation exceptionnelle, on pourra alors écrire

$$G(z)\,Q(z) - P(z) = H(z)\,e^{K(z)},$$

H étant un polynome admettant les zéros, en nombre limité, du premier membre et $K(z)$ étant un polynome de degré ρ au plus.

Supposons qu'il existe une autre équation exceptionnelle; on aura encore

$$G(z)\,Q_1(z) - P_1(z) = H_1(z)\,e^{K_1(z)}$$

et, par suite, en éliminant $G(z)$,

$$P_1 Q - P Q_1 = H Q_1 e^{K} - H_1 Q e^{K_1}.$$

Une telle relation est impossible : elle exige d'abord, en effet, que K et K_1 ne diffèrent que par une constante, sans quoi le second membre croîtrait plus vite que le premier. On peut, d'ailleurs, faire entrer cette constante dans H ou dans H_1 et, par suite, la supposer nulle. Il faudra alors, toujours pour la même

raison, que

$$HQ_1 = H_1 Q$$

et, par suite,

$$PQ_1 = P_1 Q$$

ou

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1}.$$

Les deux équations exceptionnelles ne sont donc pas distinctes. D'ailleurs, le raisonnement est en défaut si $K \equiv K_1 \equiv 0$, auquel cas $G(z)$ est une fraction rationnelle, ou plutôt, puisqu'elle est entière, un polynome.

Le mode de raisonnement s'étend sans difficulté au cas des fonctions méromorphes. Représentons une telle fonction sous la forme du quotient de deux fonctions entières. Soient $F(z)$, $G(z)$ deux fonctions entières d'ordre ρ au plus, $P(z)$ et $Q(z)$ deux polynomes. Supposons qu'on ait une égalité de la forme

$$\frac{G(z)}{F(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

pour un nombre limité de valeurs de z. On voit, comme tout à l'heure, que la fonction entière d'ordre ρ

$$G(z)\,Q(z) - F(z)\,P(z),$$

qui a un nombre limité de racines, peut se mettre sous la forme

$$G(z)\,Q(z) - F(z)\,P(z) = e^{K(z)}\,H(z),$$

H et K étant deux polynomes, K de degré ρ au plus.

Supposons qu'on ait trois telles identités

$$(1)\qquad \begin{cases} G(z)\,Q\,(z) - F(z)\,P\,(z) = H\,(z)e^{K(z)}, \\ G(z)\,Q_1(z) - F(z)\,P_1(z) = H_1(z)e^{K_1(z)}, \\ G(z)\,Q_2(z) - F(z)\,P_2(z) = H_2(z)e^{K_2(z)}. \end{cases}$$

On en déduit, en éliminant F et G,

$$\begin{vmatrix} Q & P & He^{K} \\ Q_1 & P_1 & H_1e^{K_1} \\ Q_2 & P_2 & H_2e^{K_2} \end{vmatrix} = 0.$$

On voit, par un raisonnement analogue au précédent, que cette identité entraîne $K \equiv K_1 \equiv K_2$, et alors on voit, en divisant

membre à membre deux des trois identités (1), que $\frac{G(z)}{F(z)}$ se réduit à une fraction rationnelle [1].

Nous allons généraliser ces deux propositions en suivant une marche analogue. Soit, d'abord, $G(z)$ une fonction entière d'ordre ρ. Je dis qu'on ne peut pas avoir deux égalités de la forme

$$G(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

pour une infinité de valeurs de z formant une suite dont l'exposant de convergence est inférieur à ρ, P et Q désignant deux fonctions entières d'ordre inférieur à ρ. En effet, dans ces conditions, la fonction d'ordre ρ

$$G(z)P(z) - Q(z)$$

est égale à $H(z)e^{K(z)}$, $H(z)$ désignant un produit canonique d'ordre inférieur à ρ formé avec les zéros du premier membre et $K(z)$ un polynome de degré effectivement égal à ρ. Supposons qu'on ait une deuxième identité de cette forme

$$G(z)Q_1(z) - P_1(z) = H_1(z)e^{K_1(z)},$$

on en tire encore

$$QP_1 - PQ_1 = HQ_1e^{K} - H_1Qe^{K_1}.$$

Tout revient donc à montrer l'impossibilité d'une relation de la forme

$$\varphi(z)e^{K(z)} + \varphi_1 e^{K_1(z)} + \varphi_2 = 0,$$

φ, φ_1, φ_2 étant des fonctions d'ordre inférieur à ρ, K et K_1 des polynomes de degré ρ. Dérivons cette relation, nous aurons

$$(\varphi K' + \varphi')e^{K} + (\varphi_1 K'_1 + \varphi'_1)e^{K_1} + \varphi'_2 = 0.$$

D'où l'on tire, en multipliant par φ_2, $-\varphi_2$ et en ajoutant ces deux relations,

$$(\varphi'_2\varphi - \varphi_2\varphi K' - \varphi'\varphi_2)e^{K} + (\varphi'_2\varphi_1 - \varphi_2\varphi_1 K'_1 - \varphi'_1\varphi_2)e^{K_1} = 0.$$

---

(1) Le raisonnement suppose essentiellement les trois fractions $\frac{P}{Q}$, $\frac{P_1}{Q_1}$, $\frac{P_2}{Q_2}$ distinctes, c'est-à-dire les trois mineurs $PQ_1 - QP_1 \ldots$ différents de zéro.

Admettons provisoirement, quitte à y revenir dans un instant, que la dérivée d'une fonction d'ordre h est une fonction d'ordre au plus égal à h. Chacun des facteurs entre parenthèses sera dès lors une fonction d'ordre inférieur à ρ et, par suite, de cette identité on déduit e^{K-K_1} sous la forme d'un quotient de deux fonctions d'ordre inférieur à ρ. Cela est manifestement impossible lorsque le polynome $K-K_1$ est de degré ρ. Or, s'il était de degré moindre, en divisant membre à membre les deux identités

$$GQ - P = He^{K},$$
$$GQ_1 - P_1 = H_1 e^{K_1},$$

on aurait $G(z)$ sous la forme d'un quotient de deux fonctions d'ordre inférieur à ρ. La fonction $G(z)$ ne saurait donc être d'ordre ρ, comme on le voit de suite en appliquant le théorème de M. Hadamard.

Démontrons maintenant le point sur lequel nous nous sommes appuyés, savoir que la dérivée d'une fonction entière est d'ordre au plus égal à celui de cette fonction. Considérons la fonction d'ordre ρ

$$G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

et une fonction majorante

$$\mathfrak{M}(r) = |a_0| + |a_1| r + \ldots \qquad (r = |z|).$$

La dérivée

$$G'(z) = a_1 + 2a_2 z + \ldots$$

admet pour majorante la dérivée de $\mathfrak{M}(r)$

$$\mathfrak{M}'(r) = |a_1| + 2|a_2| r + \ldots.$$

Soient $M(r)$ le maximum du module de $G(z)$ pour $|z| = r$, $M_1(r)$ la même fonction relative à $G'(z)$. Pour comparer ces deux fonctions nous passerons par l'intermédiaire des majorantes. On aura

$$M_1(r) < \mathfrak{M}'(r).$$

Or, pour $R > r$, on a

$$|a_n| < \frac{M(R)}{R^n}.$$

Remplaçons dans $\mathfrak{M}(r)$ les coefficients $|a_n|$ par les seconds

membres des inégalités précédentes. Il viendra

$$M_1(r) < M(R)\left(\frac{1}{R} + \frac{2r}{R^2} + \ldots + \frac{nr^{n-1}}{R^n} + \ldots\right).$$

La série entre parenthèses est la dérivée de

$$1 + \frac{r}{R} + \frac{r^2}{R^2} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{r}{R}} = \frac{R}{R - r}.$$

Elle est donc égale à $\frac{R}{(R-r)^2}$, et l'on a

$$M_1(r) < \frac{M(R)R}{(R-r)^2}.$$

Prenons $R = r + \frac{1}{r^n}$; si l'on a

$$M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}},$$

on en déduira

$$M_1(r) < e^{\left(r+\frac{1}{r^n}\right)^{\rho+\varepsilon}} \times \left(r + \frac{1}{r^n}\right) \times r^{2n}$$

et, par suite,

$$M_1(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon'}},$$

quel que soit ε', pour une valeur assez grande de r. La proposition énoncée est donc démontrée.

Donc, en résumé, en prenant l'expression d'*équation exceptionnelle* dans son sens le plus large, on peut énoncer le théorème suivant :

1° *Pour une fonction entière dont l'ordre n'est pas entier, il n'y a pas d'équation exceptionnelle;*

2° *Il y a une équation exceptionnelle,* au plus, *si l'ordre est entier.*

IV. — *Extension aux fonctions méromorphes.*

Nous allons étendre ces résultats aux fonctions méromorphes et nous en déduirons une classification de ces fonctions.

Définissons d'abord l'ordre d'une fonction méromorphe. Soit

$$f(z) = \frac{G(z)}{F(z)}$$

une telle fonction, F et G étant des fonctions entières. L'ordre de $f(z)$ sera, par définition, le plus grand des ordres de F et de G. Cette définition appelle une remarque : Nous devons supposer que les fonctions F et G sont les fonctions entières d'ordre minimum dont le quotient est égal à f. Il ne suffit pas de dire que F et G n'ont aucun zéro commun, car la multiplication des deux termes de la fraction par $e^{H(z)}$, H étant une fonction entière, augmente l'ordre sans introduire de zéros. Pour éviter toute difficulté on prendra, pour F, un produit *canonique* de facteurs primaires admettant pour zéros les pôles de $f(z)$. Alors la fonction G se trouvera déterminée.

L'ordre ainsi défini reste invariant lorsqu'on effectue sur f une transformation homographique. Posons

$$f_1 = \frac{af+b}{cf+d} = \frac{aG+bF}{cG+dF},$$

a, b, c, d, étant quatre constantes telles que $ad - bc \neq 0$. Les deux termes de la fraction sont d'ordre ρ; f_1 est donc d'ordre ρ au plus. La transformation homographique ne peut donc élever l'ordre d'une fonction méromorphe. Elle ne peut non plus l'abaisser, car alors la transformation inverse, qui est de même nature, l'élèverait.

Nous allons étendre cette notion de transformation homographique au cas où a, b, c, d sont des fonctions entières d'ordre inférieur à ρ. La propriété d'invariance subsiste encore. Il est, en effet, évident que si l'on pose

$$G_1 = aG + bF,$$
$$F_1 = cG + dF,$$

G_1 et F_1 sont, au plus, d'ordre ρ. Mais, inversement, on a

$$G = \frac{dG_1 - bF_1}{ad - bc},$$

$$F = \frac{-cG_1 + aF_1}{ad - bc}$$

et, par suite,

$$f = \frac{dG_1 - bF_1}{-cG_1 + aF_1}.$$

L'ordre de f est donc, au plus, égal à celui de f_1. Il en résulte que les deux ordres sont égaux.

Mais l'importance de cette notion apparaîtra encore plus nettement par les considérations suivantes : Elle va, en effet, nous permettre de distinguer, pour les fonctions méromorphes, trois cas correspondant à ceux déjà signalés par M. Picard et précédemment rappelés, relatifs au nombre des équations exceptionnelles.

Premier cas. — *Parmi les transformées homographiques de $f(z)$ ne figure aucune fonction entière.*

Soit

$$f_1 = \frac{aG + bF}{cG + dF}$$

une transformée. Alors l'équation $cG + dF = 0$ admet bien, quels que soient c et d, le nombre de racines qui est canonique pour une fonction d'ordre ρ. Si, en effet, elle en admettait moins, on pourrait former une fonction entière d'ordre inférieur à ρ, ayant les mêmes racines; soit $M(z)$ cette fonction. Alors la fonction

$$M(z)f_1(z) = \frac{M(aG + bF)}{cG + dF}$$

serait une fonction entière puisqu'elle n'admettrait plus de pôles. Mais les deux produits Ma, Mb seraient des fonctions entières d'ordre inférieur à ρ. Cette fonction Mf_1 serait donc une transformée homographique de f, et notre hypothèse ne serait pas vérifiée.

Le premier cas est donc caractérisé par ce fait qu'aucune des équations $cG + dF = 0$ n'est exceptionnelle, les fonctions entières c et d étant d'ordre inférieur à ρ.

Deuxième cas. — *Parmi les transformées figure une fonction entière, mais pour cette fonction le cas d'exception de M. Picard ne se présente pas*

Soit $\gamma(z)$ cette fonction. Posons

$$\gamma(z) = \frac{af + b}{cf + d}.$$

On aura inversement

$$f = \frac{d\gamma - b}{a - c\gamma}.$$

Une transformée quelconque sera de la forme

$$f_1 = \frac{Af + B}{Cf + D} = \frac{(Ad - Bc)\gamma + Ba - Ab}{(Cd - Dc)\gamma + Da - Cb}.$$

Étudions au point de vue du nombre de ses racines l'équation

$$f_1(z) = 0$$

et cherchons si cette équation peut être exceptionnelle. Je dis qu'on peut se borner, pour étudier ces racines, à égaler à o le numérateur. En effet, on introduit bien ainsi en trop les racines communes au numérateur et au dénominateur, mais ces racines vérifient l'équation

$$(Ad - Bc)(Da - Cb) - (Ba - Ab)(Cd - Dc) = 0,$$

qui peut s'écrire, comme l'on sait :

$$(AD - BC)(ad - bc) = 0.$$

L'exposant de convergence de la suite de ces racines est donc certainement inférieur à ρ et nos conclusions n'en seront pas altérées.

Le numérateur est, en général, une fonction entière d'ordre ρ non exceptionnelle, puisqu'il en est ainsi de γ. Il y a cependant un cas d'exception : c'est celui où l'on a

$$Ad - Bc = 0.$$

Dans ce cas, l'équation $f_1 = 0$ est telle que l'exposant de convergence de la suite de ses zéros est inférieur à ρ. Or, dire que $f_1 = 0$, c'est dire que l'on a

$$f(z) = -\frac{B}{A}.$$

Nos conclusions sont donc les suivantes : *Parmi les équations de la forme précédente, où* A *et* B *sont des fonctions entières d'ordre inférieur à* ρ, *il y en a une, et une seule, telle que l'exposant de convergence de la suite de ses zéros soit inférieur à* ρ. C'est l'équation

$$f(z) = -\frac{d}{c}.$$

Ce cas correspond à celui où le nombre des équations exceptionnelles est égal à *un,* dans le théorème de M. Picard.

TROISIÈME CAS. — *Parmi les transformées figure une fonction entière, et cette fonction se trouve dans le cas d'exception de M. Picard.*

Soit

$$\gamma = \frac{af+b}{cf+d}$$

cette fonction. Son ordre ρ, qui est l'ordre de f_1, est nécessairement entier, et l'on peut poser

$$\gamma(z) = \mathrm{M}\,e^{\mathrm{P}(z)},$$

M étant une fonction entière d'ordre inférieur à ρ et $\mathrm{P}(z)$ un polynome de degré ρ exactement. On voit aisément, en reproduisant le raisonnement déjà fait dans le premier cas, que la fonction $\frac{\gamma}{\mathrm{M}}$ est aussi une transformée homographique de f. il en résulte que parmi les transformées figure une exponentielle. C'est là ce qui caractérise ce cas.

Mais, inversement, on aura

$$f(z) = \frac{\mathrm{A}e^{\mathrm{P}(z)} + \mathrm{B}}{\mathrm{C}e^{\mathrm{P}(z)} + \mathrm{D}},$$

A, B, C, D étant quatre fonctions d'ordre inférieur à ρ. Considérons alors une transformée quelconque

$$f_1(z) = \frac{af(z)+b}{cf(z)+d};$$

on en déduit

$$f_1(z) = \frac{[a\mathrm{A}+b\mathrm{C}]e^{\mathrm{P}(z)} + a\mathrm{B} + b\mathrm{D}}{[c\mathrm{A}+d\mathrm{C}]e^{\mathrm{P}(z)} + c\mathrm{B} + d\mathrm{D}}.$$

Considérons encore l'équation $f_1(z) = 0$. Pour étudier la suite de ses racines, on peut encore ici se borner à égaler à o le numérateur. On trouve une fonction d'ordre ρ, en général non exceptionnelle. Elle le devient dans les deux cas suivants :

$$a\mathrm{B} + b\mathrm{D} = 0,$$
$$a\mathrm{A} + b\mathrm{C} = 0.$$

Dans ces deux cas l'exposant de convergence de la suite des zéros est d'ordre inférieur à ρ. Ils correspondent visiblement aux deux

équations :

$$f(z) = \frac{A}{C} \quad \text{et} \quad f(z) = \frac{B}{D}.$$

On peut donc dire que *pour l'équation*

$$f(z) = -\frac{b}{a},$$

a et b étant d'ordre inférieur à ρ, *la suite des zéros a pour exposant de convergence* ρ, *sauf pour deux équations exceptionnelles.*

Nous avons donc épuisé tous les cas, puisque le troisième renferme tous ceux qui étaient exclus par les deux premiers. La généralisation du théorème de M. Picard est donc complète. De plus, nous avons, dans chacun des cas, mis en évidence un fait caractéristique de ce cas. Le premier est le cas général. Les autres ne se présentent que si, parmi les transformées homographiques, figurent des fonctions entières. Dans le troisième cas, une des transformées est une exponentielle.

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant :

Étant donnée une fonction méromorphe $f(z)$ *d'ordre* ρ *et une autre fonction méromorphe quelconque* $\varphi(z)$ *d'ordre inférieur, parmi les équations*

$$f(z) = \varphi(z),$$

il n'y en a pas en général d'exceptionnelles, et, s'il y en a, il y en a deux au plus.

CHAPITRE IV.

LES SÉRIES DE FRACTIONS RATIONNELLES.

I. — *La décomposition en éléments simples.*

C'est à l'étude du développement des fonctions méromorphes sous la forme d'une série d'éléments simples, c'est-à-dire d'une série de fractions rationnelles dont chacune possède un seul pôle, que nous allons nous attacher maintenant. Nous étudierons aussi les relations entre cette forme et celle du quotient de deux fonctions entières qui nous a déjà servi dans le Chapitre précédent.

On obtient d'abord aisément des fonctions méromorphes décomposées en éléments simples en considérant la dérivée logarithmique d'une fonction entière. Soit une fonction entière de genre p :

$$G(z) = \prod \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{z^p}{pa_n^p}}.$$

Considérons sa dérivée logarithmique. C'est une fonction méromorphe

$$f(z) = \frac{G'(z)}{G(z)} = \sum \left[\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \ldots + \frac{z^{p-1}}{a_n^p}\right],$$

et elle est justement donnée sous la forme d'une série de fractions rationnelles dont chacune possède un seul pôle.

On n'obtient ainsi, bien entendu, que des cas très particuliers de fonctions méromorphes, mais il arrive souvent que de telles fonctions se comportent comme des dérivées logarithmiques de fonctions entières. On sera conduit tout naturellement à considérer des développements en série dont l'élément simple sera de la forme

$$A_n \left[\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \ldots + \frac{z^{p-1}}{a_n^p}\right],$$

les A_n n'étant plus maintenant des nombres entiers. Si ces

nombres A_n ne croissent pas trop vite, si, par exemple, ils restent inférieurs à une quantité fixe, le développement que nous considérons sera analogue à la dérivée logarithmique d'une certaine fonction entière de genre fini p. Mais la restriction que nous imposons ainsi à A_n a l'inconvénient de ne faire s'appliquer de tels développements qu'à une catégorie très restreinte de fonctions méromorphes. Il est aisé, en effet, de concevoir des exemples très simples de ces fonctions où les A_n (résidus relatifs aux pôles a_n) croissent très vite. Remarquons que l'élément simple que nous avons écrit peut aussi s'écrire

$$\frac{A_n z^p}{a_n^p(z - a_n)},$$

et même, si les A_n grandissent très vite avec n, on peut toujours prendre p assez grand pour que cette série converge. Si, par exemple, on prend $A_n = a_n^n$, il suffira de prendre $p > n$ pour que la série converge. Si alors on veut conserver l'analogie avec une dérivée logarithmique de fonction entière, c'est une fonction entière de genre infini qu'il faudra considérer.

Donnons-en un exemple. Considérons la série

$$f(z) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{(z-n)(z-n-e^{-n})},$$

qui est manifestement convergente. Formons une fonction entière ayant pour zéros les pôles de $f(z)$; ce sera

$$G(z) = \prod \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \left(1 - \frac{z}{n+e^{-n}}\right) e^{\frac{z}{n+e^{-n}}}.$$

C'est bien une fonction de genre *un*, car les deux séries

$$\sum \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{(n+e^{-n})^2}$$

sont convergentes. Je dis que le produit $f(z)G(z)$ est une fonction entière d'ordre *un*. En effet, c'est d'abord certainement une fonction entière. Pour avoir son ordre, nous chercherons le maximum du module de $f(z)$ sur des cercles de rayon $n + \frac{1}{2}$. On voit

aisément que sur ces cercles on a

$$|f(z)| < 8 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \dots$$

Soit k la somme de la série ci-dessus, qui est évidemment convergente. On aura donc sur ces cercles

$$|f(z)\,G(z)| < k\,|G(z)|.$$

Comme $G(z)$ est d'ordre *un* et que d'autre part ces cercles sont suffisamment rapprochés, on en conclut bien que $f(z)\,G(z)$ est d'ordre *un*. $f(z)$ est donc une fonction méromorphe d'ordre *un*. Décomposons-la en éléments simples. On aura

$$f(z) = \sum\left[\frac{e^n}{z - n - e^{-n}} - \frac{e^n}{z - n}\right].$$

Mais la série qui est dans le second membre n'est plus absolument convergente si l'on supprime le crochet. Pour la rendre convergente, on sera forcé d'ajouter à chaque terme un polynome dont le degré croîtra indéfiniment avec n. Nous sommes justement dans le cas que nous avons signalé.

Laissons de côté cette analogie des fonctions méromorphes et des dérivées logarithmiques et considérons un développement en éléments simples ([1]).

Soit d'abord un développement de la forme

$$f(z) = \sum \frac{A_n}{z - a_n}.$$

La première question qui se pose est de savoir à quelles conditions ce développement représente une fonction méromorphe. Il suffit pour cela : 1° que a_n croisse indéfiniment ([2]) et 2° que la série $\sum\left|\frac{A_n}{a_n}\right|$ converge. En effet, si z est distinct d'un point a_n,

---

([1]) Pour simplifier l'écriture, nous supposerons, dans tout ce qui suit, les pôles simples.

([2]) Si a_n ne croît pas indéfiniment, mais tend vers une limite a, on peut, par la méthode que nous allons exposer, étudier la fonction $f(z)$, qui a alors le point a comme point essentiel.

on peut écrire

$$\left|\frac{A_n}{z - a_n}\right| = \left|\frac{A_n}{a_n}\right| \frac{1}{\left|1 - \frac{z}{a_n}\right|}$$

et les deux séries, dont les termes généraux sont $\frac{A_n}{a_n}$ et $\frac{A_n}{z - a_n}$ convergent absolument en même temps. Si le point z vient dans l'entourage d'un point a_n, en retranchant de la série le terme correspondant, on obtient une série convergente, même en a_n. On voit ainsi que $f(z)$ admet tous les points a_n pour pôles simples et n'admet pas d'autres singularités à distance finie.

Nous n'irons pas plus avant dans l'étude de ces développements quand on ne fait pas d'autres hypothèses. On peut évidemment espérer trouver, dans ce cas, des résultats très généraux et très intéressants. Mais leur généralité même est un inconvénient. Ils ne peuvent, en effet, être d'aucun intérêt dans l'étude des différentes classes de fonctions méromorphes, ce qui est surtout notre objet. Nous allons, au contraire, augmenter le nombre de nos hypothèses, ce qui réduit nécessairement le nombre des fonctions auxquelles s'appliqueront nos résultats.

La convergence de la série $\sum\left|\frac{A_n}{a_n}\right|$ peut être obtenue de deux façons, soit qu'on suppose que les A_n tendent rapidement vers 0, soit que les a_n croissent rapidement. C'est surtout ce dernier cas qui va nous intéresser. Mais nous tenons à montrer qu'il est, en somme, assez particulier. *A priori,* en effet, on n'a aucun renseignement sur la croissance des a_n. On pourra, par exemple, supposer soit $a_n = \log\log \ldots \log n$, soit $a_n = e^{e^{\cdot^{\cdot^{n}}}}$: dans chacun de ces cas, on peut choisir les A_n de manière que la fonction soit méromorphe. L'hypothèse que nous faisons est donc, théoriquement, très restrictive; elle l'est moins *en pratique,* car elle est vérifiée le plus souvent par les fonctions méromorphes qui se présentent actuellement.

Nous supposerons donc que $|a_n|$ soit de degré $\left(\frac{1}{\rho}\right)$. On aura donc, pour n assez grand et quel que soit le nombre positif ε,

$$n^{\frac{1}{\rho} - \varepsilon} < |a_n| < n^{\frac{1}{\rho} + \varepsilon}.$$

On pourra donc poser

$$|a_n| = n^{\frac{1}{\rho + \varepsilon_n}}, \qquad \lim \varepsilon_n = 0,$$

et l'on pourra dire aussi que les a_n sont les zéros d'une fonction entière d'ordre ρ à croissance régulière.

II. — *La convergence des séries canoniques.*

De plus, nous allons substituer au développement précédent un développement en éléments simples un peu plus général. Nous supposerons que la série

$$\sum \frac{A_n}{z - a_n}$$

n'est plus convergente, mais qu'on peut assurer sa convergence en ajoutant à chaque terme un certain polynome. Au sujet de ces polynomes, nous ferons une remarque. La méthode que nous allons suivre est, en somme, celle de Weierstrass.

Le polynome qu'il retranchait était toujours formé par les premiers termes du développement de $\frac{1}{z - a_n}$; de même, le polynome qu'il introduisait en exposant dans ses facteurs primaires provenait de celui-là par intégration. Plus tard, M. Mittag-Leffler s'est affranchi de cette forme particulière de polynomes et en a introduit de forme plus arbitraire. Mais, dans des recherches du genre de celles qui nous occupent, il n'y a aucun intérêt à introduire ainsi des polynomes assujettis à la seule condition d'assurer la convergence de la série. Les séries de polynomes sont, en effet, un des instruments de calcul les plus compliqués que l'on connaisse; elles sont très importantes en ce sens qu'elles s'appliquent à des catégories très larges de fonctions; mais, dans l'étude de fonctions particulières, nous aurons tout intérêt à n'employer que des polynomes d'une forme bien déterminée; c'est ce que nous ferons toujours. Nous appellerons *série canonique* de fonctions rationnelles une série dont l'élément simple sera une fonction rationnelle à un seul pôle, dont le numérateur sera de degré inférieur au dénominateur, diminuée d'un polynome obtenu en prenant les premiers termes du développement de cette fonction suivant les puissances croissantes de z.

Dans le cas (auquel nous nous bornerons) des pôles simples, les éléments simples seront donc

$$\frac{1}{z-a_n}+\frac{1}{a_n}=\frac{z}{a_n(z-a_n)},$$

$$\frac{1}{z-a_n}+\frac{1}{a_n}+\frac{z}{a_n^2}=\frac{z^2}{a_n^2(z-a_n)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{1}{z-a_n}+\frac{1}{a_n}+\ldots+\frac{z^{\lambda_n-1}}{a_n^{\lambda_n}}=\frac{z^{\lambda_n}}{a_n^{\lambda_n}(z-a_n)}.$$

La série canonique sera donc

$$f(z)=\sum\frac{A_n}{z-a_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{\lambda_n},$$

ce que nous écrirons symboliquement

$$f(z)=\sum\left[\frac{A_n}{z-a_n}-\left(\frac{A_n}{z-a_n}\right)_{\lambda_n}\right]$$

en représentant par

$$\left(\frac{A_n}{z-a_n}\right)_{\lambda_n}$$

les λ_n premiers termes du développement de $\frac{A_n}{z-a_n}$.

Cherchons à quelles conditions la série précédente convergera et représentera une fonction méromorphe. Je dis que, si l'on pose $r_n=|a_n|$, cette condition s'exprime par la convergence de la série entière

$$\sum\frac{|A_n|}{r_n^{\lambda_n}}r^{\lambda_n}.$$

Si l'on forme, en effet, le rapport des modules des termes correspondants de ces deux séries, on voit que ce rapport a pour limite zéro. Par suite, si la série précédente converge, il en est de même de la première.

Nous avons déjà fait une hypothèse sur la croissance des zéros a_n. Nous allons en faire une aussi sur la croissance des résidus A_n. Remarquons que, si l'on a

$$f(z)=\frac{G(z)}{F(z)},$$

on en tire

$$A_n = \frac{G(a_n)}{F'(a_n)}.$$

Nous avons écarté le cas où $F'(a_n)$ était très petit, pour nous borner à celui où $G(a_n)$ est très grand. Tout ce qu'on peut dire d'ailleurs sur cette fonction d'ordre ρ, c'est qu'elle est inférieure à $e^{r_n^{\rho+\varepsilon}}$, quel que soit ε pour r_n assez grand. On ne diminuera pas, au moins en général, la croissance en divisant par $F'(a_n)$. On doit donc supposer

$$|A_n| < e^{r_n^{\rho+\varepsilon}}.$$

C'est la plus petite limite supérieure qu'on puisse imposer à $|A_n|$; mais rien n'empêche de supposer que cette quantité est notablement inférieure à cette limite. Si donc nous posons

$$|A_n| = e^{r_n^{\rho+\eta_n}}.$$

η_n sera, soit positif et alors très petit, soit négatif et quelconque.

Nous avons posé

$$r_n = n^{\frac{1}{\rho+\varepsilon_n}}.$$

On aura donc

$$|A_n| = e^{n^{\frac{\rho+\eta_n}{\rho+\varepsilon_n}}}.$$

Posons

$$\frac{\rho+\eta_n}{\rho+\varepsilon_n} = 1 + \theta_n.$$

On pourra dire que, quelque petit que soit donné le nombre θ positif, on pourra toujours prendre n assez grand pour que

$$\theta_n < \theta,$$

l'inégalité n'ayant pas lieu forcément en valeur absolue. On aura alors

$$|A_n| = e^{n^{1+\theta_n}}.$$

Nous allons maintenant déterminer le nombre λ_n par les conditions suivantes. Considérons le plus petit nombre μ'_n qui soit supérieur à la fois à $\frac{2}{n}$ et à $2\theta_n$. Quand n croît indéfiniment, ce nombre tend vers zéro. On aura d'ailleurs évidemment, en vertu

de la manière dont μ'_n est choisi,

$$\mu'_n - \theta_n > \frac{1}{n};$$

λ_n sera alors déterminé par l'égalité suivante :

$$r_n^{\lambda_n} = e^{n^{1+\mu_n}}.$$

où μ_n désigne le plus petit nombre supérieur à μ'_n et rendant entière l'expression

$$\frac{n^{1+\mu_n}}{\log r_n}.$$

Ces nombres μ_n tendent également vers o et vérifient aussi l'inégalité

$$\mu_n - \theta_n > \frac{1}{n}.$$

Les λ_n étant ainsi déterminés, considérons la série canonique

$$\varphi(z) = \sum \frac{A_n}{z - a_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{\lambda_n}.$$

Je dis qu'elle converge pour toute valeur de z différente des a_n. Il suffit, pour cela, de démontrer la convergence de la série suivante :

$$\sum \frac{|A_n| r^{\lambda_n}}{r_n^{\lambda_n}}.$$

Je vais démontrer de plus que cette série définit une fonction entière d'ordre ρ. Rappelons qu'en général la série

$$\sum c_n r^{\lambda_n}$$

définit une fonction entière si $\sqrt[\lambda_n]{c_n}$ tend vers o.

Or, nous avons

$$|A_n| = e^{n^{1+\theta_n}} = e^{n^{1+\mu_n} n^{\theta_n - \mu_n}} = r_n^{\lambda_n n^{\theta_n - \mu_n}}.$$

Le terme général de la série est donc

$$\frac{r^{\lambda_n}}{r_n^{\lambda_n(1-n^{\theta_n-\mu_n})}}.$$

Formons $\sqrt[\lambda_n]{c_n}$. Cette quantité est égale à

$$\frac{1}{r_n^{1-n^{\theta_n-\mu_n}}} < \frac{1}{r_n^{1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}}}$$

en vertu de l'inégalité

$$\mu_n - \theta_n > \frac{1}{n}.$$

Cette expression tend bien vers o quand n croît indéfiniment. L'ordre de la fonction entière sera la limite de

$$\frac{\log \lambda_n}{\log\left(r_n^{1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}}\right)}$$

si cette limite existe. Or, on a

$$\log \lambda_n = (1 + \mu_n) \log n - \log\log r_n,$$
$$\log r_n = \frac{\log n}{\rho + \varepsilon_n},$$

et l'on en déduit sans peine que l'ordre est égal à ρ.

III. — *Cas de la distribution ordinaire des pôles.*

Considérons maintenant une fonction méromorphe quelconque

$$f(z) = \frac{G(z)}{F(z)},$$

F et G étant d'ordre ρ. Nous allons supposer la distribution des zéros de $F(z)$ *ordinaire*. Voici ce que nous entendons par là. Si a_n est un zéro simple, nous supposerons que l'on a

$$|F'(a_n)| > e^{-n^{1+\varepsilon}}.$$

Nous dirons, au contraire, que la distribution est *extraordinaire,* si, pour une infinité de zéros, on a

$$|F'(a_n)| < e^{n^{1+\varepsilon}}.$$

Nous reviendrons plus loin sur la distribution extraordinaire, mais nous tenons à signaler, dès maintenant, que le cas de la dis-

tribution ordinaire est, en somme, le cas général. C'est, en effet, comme nous le verrons plus tard, le cas où les zéros ne se rapprochent pas indéfiniment deux par deux [1].

Nous allons montrer que, dans l'hypothèse faite de zéros à croissance régulière et distribués d'une façon *ordinaire*, on peut décomposer la fonction $f(z)$ en une série de fractions rationnelles canonique, augmentée d'une fonction entière, dont l'ordre ne dépasse pas ρ. Ce développement sera alors absolument analogue à celui d'une fraction rationnelle en éléments simples, augmentés d'un polynome de degré inférieur à ce qu'on peut appeler le degré de la fraction rationnelle.

En effet, connaissant les pôles a_n et les résidus $A_n = \frac{G(a_n)}{F'(a_n)}$, nous pouvons déterminer les nombres entiers λ_n de façon que la série

$$f_1(z) = \sum \frac{A_n z^{\lambda_n}}{(z - a_n) a_n^{\lambda_n}}$$

représente une fonction méromorphe. Considérons alors la différence

$$H(z) = f(z) - f_1(z).$$

C'est une fonction entière. Je dis qu'elle est d'ordre ρ au plus. On a, en effet,

$$H(z) = \frac{G(z) - f_1(z) F(z)}{F(z)}$$

et tout revient manifestement à établir que le produit $f_1 F$ est d'ordre ρ au plus. Nous allons, pour cela, entourer les pôles a_n de cercles assez petits pour qu'ils ne recouvrent pas tout le plan et suffisamment grands d'autre part pour que $|z - a_n|$ soit assez grand. Soit R_n le rayon de celui de ces cercles qui entoure a_n. Supposons

$$R_n = \frac{1}{r_n^s}.$$

Leur surface sera, au plus, $\pi \sum \frac{1}{r_n^{2s}}$, et cette surface sera finie pourvu que $2s > \rho$. Cherchons alors à limiter la fonction f_1 dans

---

[1] Notre définition peut s'étendre au cas des zéros multiples, en supposant que c'est la première des dérivées non nulles de F qui vérifie de telles inégalités.

une région intérieure à ces cercles. On aura évidemment

$$|f_1(z)| < \sum \frac{|A_n| r^{\lambda n}}{r_n^{\lambda n - s}}.$$

La fonction entière qui est dans le second membre est d'ordre ρ. Elle diffère, en effet, très peu de la fonction que nous avons étudiée il y a un instant, et les raisonnements et les calculs faits s'appliquent presque sans modification. Dans une telle région, le produit f_1 F sera donc aussi inférieur à une fonction d'ordre ρ. Comme, d'autre part, nous savons que ce produit définit une fonction entière, nous pouvons affirmer que le résultat subsiste même dans la région exclue du plan.

Pour cette dernière partie du raisonnement, il est essentiel de supposer que l'on peut tracer dans l'aire non exclue un contour, entièrement à distance finie, renfermant à son intérieur l'un quelconque de ces cercles. Il faut remarquer que la condition que nous avons imposée à l'aire totale d'être finie n'est pas suffisante pour cela. Il est facile d'imaginer des cercles d'aire finie et tels qu'on ne puisse tracer de contour remplissant les conditions précédentes. Supposons, par exemple, que les pôles soient les points d'abscisses 1, $1 + \frac{1}{2}$, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, ... situés sur l'axe des quantités réelles. (Ces points s'éloignent évidemment à l'infini.) Traçons, de ces points comme centres, les cercles de rayons 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ... Ces cercles empiètent les uns sur les autres. La région qui leur est intérieure forme un continuum d'un seul tenant qui s'éloigne à l'infini, et cependant l'aire totale en est finie. Nous serons certains d'éviter ce cas d'exception en ajoutant la condition que la somme des diamètres reste finie, c'est-à-dire que la série $\sum \frac{1}{r_n^s}$ soit convergente ou que $s > \rho$.

On peut donner une condition un peu plus avantageuse. Il n'est, en effet, nullement nécessaire que la somme des diamètres reste finie : il suffit simplement que la somme des diamètres des cercles exclus correspondant à des pôles de module inférieur à r soit inférieure à r. Si l'on désigne par a_n, a_{n+1} les deux pôles dont les modules comprennent r, on devra avoir, par exemple,

$$3 \sum R_n < r$$

ou

$$3\sum \frac{1}{r_n^s} < r_n$$

ou

$$3\sum \frac{1}{n^{\frac{s}{\rho}}} < n^{\frac{1}{\rho}}.$$

Et, en remplaçant cette somme par une intégrale définie, ce qui en accroît la valeur, nous voyons qu'il suffira que l'on ait

$$\frac{3}{1-\frac{s}{\rho}}\, n^{1-\frac{s}{\rho}} < n^{\frac{1}{\rho}},$$

et pour cela il suffit que l'on ait $\rho - s < 1$ ou $s > \rho - 1$. C'est la valeur que nous voulions obtenir.

Nous avons donc établi le théorème fondamental que nous avions en vue. On aura bien

$$f(z) = f_1(z) + \mathrm{H}(z),$$

f_1 étant une série canonique et H une fonction entière d'ordre ρ. Remarquons que, ici encore, on pourrait faire disparaître cette fonction H en en répartissant les termes entre les éléments simples, mais nous perdrions aussi le bénéfice de la forme bien déterminée de la fraction simple, terme général de $f_1(z)$.

IV. — *Remarques sur les séries générales de fractions rationnelles.*

La méthode que nous venons d'utiliser, et qui consiste à exclure du plan de petits cercles entourant les pôles, peut s'appliquer, d'une manière très générale, à l'étude des fractions rationnelles, même lorsqu'elles ne représentent pas des fonctions méromorphes. Nous allons en dire quelques mots.

Nous ne ferons aucune hypothèse sur la position des pôles dans le plan. Nos hypothèses porteront seulement sur l'étendue de la portion exclue du plan.

Étudions d'abord le cas simple où les pôles sont des points de

l'axe réel. Considérons une expression

$$(1) \qquad \sum \frac{A_n}{x - a_n},$$

A_n, a_n étant des constantes réelles et a_n une variable réelle. Nous ne savons rien sur la distribution des points a_n : ce sont des points d'un segment AB de longueur a. Entourons chacun d'eux d'un petit segment de longueur $2u_n$ (a_n étant le milieu du segment) et excluons du segment AB toute la portion intérieure à ces segments, c'est-à-dire tous les points d'abscisse comprise entre $a_n - u_n$ et $a_n + u_n$. La question qui se pose est alors la suivante : Peut-on choisir les u_n de façon 1° qu'il y ait des points de AB intérieurs à tous ces segments, et 2° que, pour ces points, la série (1) converge?

Pour fixer les idées, supposons la série $\sum \sqrt{|A_n|}$ convergente. On peut alors déterminer un nombre p tel que, si l'on prend $u_n = p\sqrt{|A_n|}$, il existe des points pour lesquels les conditions précédentes soient remplies. En effet, pour un point intérieur aux segments exclus, on a

$$\sum \left| \frac{A_n}{x - a_n} \right| \leqq \sum \frac{|A_n|}{|u_n|} = \sum \frac{1}{p} \sqrt{|A_n|}.$$

La série converge donc bien. D'autre part, la série

$$\sum |u_n| = p \sum \sqrt{|A_n|}$$

étant convergente, on peut toujours supposer p choisi de manière que sa somme soit inférieure à $\frac{a}{2}$. Alors la portion totale exclue du segment AB est inférieure à AB. On peut regarder comme évident qu'il y a des points de AB extérieurs à la portion exclue.

Nous allons d'ailleurs démontrer ce point en toute rigueur. Dire qu'il n'y a pas de point extérieur aux segments exclus, c'est dire que tout point M de AB est intérieur (1) au moins à un de ces segments, ou coïncide avec une de ses extrémités. Je dis qu'on peut écarter cette dernière hypothèse. On peut, en effet, augmenter chacun des segments $2u_n$ d'une très faible portion de sa

(1) Nous prenons, dans ce qui suit, le mot *intérieur* dans son sens le plus restrictif.

valeur, de façon que la somme des nouveaux segments soit encore inférieure à AB. La chose est manifestement possible. Posons, en effet,

$$2\sum u_n = b < a.$$

Choisissons un nombre c entre a et b. Substituons à chaque segment $2u_n$ un segment ayant pour longueur

$$2u'_n = \frac{c}{b}2u_n$$

et ayant même milieu a_n que $2u_n$. On aura

$$2\sum u'_n = \frac{c}{b}2\sum u_n = c < a.$$

C'est ce que nous voulons établir. Nous raisonnerons désormais sur ces nouveaux segments que nous continuerons à appeler $2u_n$. Nous voulons montrer qu'il est impossible que tout point M de AB soit intérieur à un au moins de ces segments; je vais montrer que si ce fait était vrai l'on pourrait, parmi ces segments, en choisir un nombre limité tel que tout point M de AB soit intérieur au moins à l'un d'eux. Si nous établissons cela, le théorème sera démontré, car la somme de ce nombre *limité* de segments étant, *a fortiori,* inférieure à AB, ils ne sauraient épuiser tous les points de AB.

Pour démontrer le point sur lequel nous nous appuyons, supposons-le inexact. Alors, quelque grand que soit donné le nombre q, on pourra trouver des points M tels que le rang des segments les contenant soit $n > q$. Divisons en deux parties égales le segment AB. L'une des deux parties jouira de la même propriété, et ainsi de suite. Nous formons ainsi une suite illimitée de segments ω tendant vers un point limite μ *intérieur* à AB. C'est ici que se présente une contradiction; μ étant intérieur à AB est intérieur à un des segments, $2u_h$ par exemple. Mais on peut choisir un segment ω qui soit entièrement intérieur au segment $2u_h$. Pour ce segment, il ne saurait donc y avoir de point M tel que le rang d'un segment quelconque le contenant soit supérieur à un entier quelconque q, puisque, pour tout point intérieur à ω, ce rang est l'entier déterminé h. La proposition est donc démontrée.

Nous allons simplement supposer la série $\sum u_n$ convergente sans rien supposer sur sa somme, et nous allons montrer que, sur un segment $A'B' = a'$, aussi petit qu'on voudra, intérieur à AB, il y a des points extérieurs à ces segments. On peut toujours, en effet, prendre n assez grand pour que

$$\sum_{n+1}^{\infty} u_n < \frac{a'}{2}.$$

Entourons alors les n premiers points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de segments $2\varepsilon, 2\varepsilon_1, \ldots, 2\varepsilon_n$ dont la somme soit inférieure à $\frac{a'}{2}$ (par exemple, chacun des ε sera inférieur à $\frac{a'}{2n}$). Si nous substituons aux segments $2u_1, \ldots, 2u_n$ les segments $2\varepsilon_1, \ldots, 2\varepsilon_n$, le théorème précédent s'appliquera; la somme des segments exclus est inférieure à a', et sur le segment a' il y a des points extérieurs aux segments exclus, rendant, par suite, convergente la série $\sum \frac{A_n}{x - a_n}$, puisque c'est ainsi qu'on a choisi les u_n.

Donnons comme exemple la série $\sum \frac{A_{pq}}{x - \frac{p}{q}}$, p et q étant deux entiers positifs, et p étant inférieur à q. Si les A_{pq} sont suffisamment petits, il y aura sur le segment 0-1 une infinité non dénombrable de points rendant convergente la série, et, cependant, chacun d'eux sera voisin d'une infinité dénombrable de pôles de la série. Pour bien préciser, nous rangerons les pôles dans l'ordre suivant. Nous ferons $q = 2$ avec $p = 1$, puis $q = 3$ et $p = 1$, $p = 2, \ldots, q = n$ avec $p = 1, p = 2, \ldots, p = n - 1$; le rang du pôle $\frac{p}{q}$ sera alors inférieur à q^2. Si l'on pose $A_{p,q} = A_n$, on aura $n < q^2$. Si l'on prend, par exemple,

$$A_n = \frac{1}{q^{4+\varepsilon}},$$

la série $\sum \sqrt{A_n}$ sera convergente, car on a

$$A_n < \frac{1}{n^{2+\frac{\varepsilon}{2}}}, \quad \sqrt{A_n} < \frac{1}{n^{1+\frac{\varepsilon}{4}}},$$

et l'on est bien dans les conditions requises.

Le principal théorème établi dans ce qui précède s'étend au cas où l'on considère, au lieu d'un segment de droite, un arc de cercle. Il s'appliquera de même à un angle ayant son sommet à l'origine. Si l'on convient d'exclure du plan l'angle compris entre les deux droites d'argument $\alpha_n \pm \omega_n$ (α_n étant l'argument d'un pôle), on pourra dire que, dans tout angle intérieur à l'angle total, figurent des droites non exclues, les ω_n étant simplement assujettis à rendre la série $\sum \omega_n$ convergente, sa somme étant inférieure à l'angle considéré.

V. — *Application aux fonctions méromorphes.*

Appliquons ces résultats à un exemple simple. Considérons une fonction entière

$$f(z) = \prod \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$$

et supposons que la série $\sum \frac{1}{|a_n|^s}$ converge pour une valeur de s inférieure à $\frac{1}{2}$. Autrement dit, l'ordre de la fonction entière sera inférieur à $\frac{1}{2}$ (elle est de genre 0). Prenons la dérivée logarithmique

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum \frac{1}{z - a_n}.$$

C'est une fonction méromorphe admettant pour pôles les points a_n. De chacun de ces points comme centre, décrivons un cercle de rayon $|a_n|^s$. Si le point z est extérieur à tous ces cercles, on aura $|z - a_n| > |a_n|^s$ et, par suite, on voit immédiatement que la série converge, car

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| < \sum \frac{1}{|a_n|^s}.$$

Je dis qu'on peut trouver des droites issues de l'origine et telles que, en s'éloignant indéfiniment sur ces droites, la fonction méromorphe tende vers 0. Menons, en effet, de l'origine des tan-

gentes aux cercles exclus. L'angle de ces tangentes est

$$2 \arc \sin |a_n^{s-1}|.$$

La série de ces angles converge en même temps que la série $\frac{1}{|a_n|^{1-s}}$, et celle-ci est évidemment convergente puisque $s < \frac{1}{2}$. On peut donc trouver un nombre n' assez grand pour que le reste de la série limitée au terme de rang n' soit inférieur à 2π, et alors on sera assuré, en vertu des théorèmes précédents, qu'il existe des droites issues de l'origine ne coupant aucun des cercles relatifs aux pôles de rang supérieur à n' et coupant, par suite, un nombre fini de cercles exclus. Alors, supposons que le point z s'éloigne à l'infini sur une de ces droites. A partir d'une certaine position, il ne rencontrera plus aucun des petits cercles; le module de $\frac{f'}{f}$ sera donc inférieur à $\sum \frac{1}{|a_n|^s}$. Choisissons alors un nombre p tel que

$$\sum_{p+1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^s} < \varepsilon,$$

ε étant donné d'avance. On pourra donc choisir des positions de z suffisamment éloignées de l'origine pour que la somme des termes suivant le $p^{\text{ième}}$ soit inférieure à ε. Comme, d'autre part, les p premiers termes sont des fractions rationnelles de la forme $\frac{1}{z - a_n}$, leur somme peut être, pour $|z|$ assez grand, rendue inférieure à ε. Dès lors, la valeur absolue de $\frac{f'}{f}$ sera inférieure à 2ε pour toutes les positions suivantes de z. Le théorème est établi.

Les droites dont nous venons d'établir l'existence sont en nombre infini et forment même une infinité non dénombrable. Cependant, il peut arriver que l'on ne puisse trouver un angle dont toutes les droites remplissent la condition. Supposons, par exemple, que l'on ait

$$a_n = \frac{1}{n^3} e^{\frac{p}{q}\pi i},$$

p et q étant deux entiers quelconques; toute droite passant par l'origine et d'argument commensurable avec π rencontrera un pôle. On ne saurait donc trouver un angle, si petit qu'on le

choisisse, tel que toutes les droites intérieures à l'angle possèdent la propriété précédente.

VI. — *Cas des fonctions méromorphes à pôles simples.*

On peut obtenir des résultats assez analogues aux précédents en appliquant la même méthode aux fonctions méromorphes à pôles simples

$$f(z) = \sum \frac{A_n}{z - a_n}.$$

Posons $|a_n| = r_n$. Décrivons du pôle a_n comme centre un cercle de rayon r_n^s. Supposons que la série $\sum \frac{|A_n|}{r_n^s}$ converge. Le raisonnement précédent s'appliquera sans rien y changer sous la seule condition que la série $\sum \frac{1}{r_n^{1-s}}$ converge aussi.

Les hypothèses précédentes n'imposent aucune restriction à la croissance des zéros. Les conditions précédentes sont compatibles avec toutes les valeurs de s, pourvu que les A_n décroissent suffisamment vite.

Il suffira, en général, de supposer que la série dont le terme général est la moyenne géométrique des deux précédents converge. Il est d'abord évident que, si les deux séries de termes généraux u_n et v_n convergent, il en est de même de la série de terme général $\sqrt{u_n v_n}$, car $\sqrt{2 u_n v_n} < u_n + v_n$. Ici donc la série $\sum \frac{\sqrt{A_n}}{\sqrt{r_n}}$ doit converger. Inversement, supposons cette série convergente et choisissons un nombre s_n tel que

$$\frac{|A_n|}{r_n^{s_n}} = \frac{\sqrt{A_n}}{\sqrt{r_n}},$$

ce qui entraîne d'ailleurs

$$\frac{1}{r_n^{1-s_n}} = \frac{\sqrt{A_n}}{\sqrt{r_n}}.$$

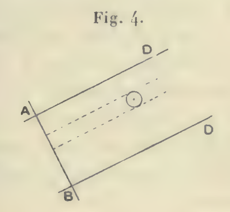
En décrivant autour du pôle a_n un cercle de rayon $r_n^{s_n}$, le raisonnement s'appliquera à la portion du plan extérieure à ces cercles. La condition est donc suffisante.

La seule condition est donc la convergence de la série $\sum \frac{\sqrt{A_n}}{\sqrt{r_n}}$, ce qui n'introduit aucune restriction à la distribution dans le plan des pôles r_n.

Nous allons, d'une façon un peu plus générale, chercher à déterminer des courbes C rencontrant un nombre limité de cercles exclus r_n, en supposant toujours qu'on ne sache rien sur la distribution des points a_n. Supposons que nous connaissions une telle courbe. Sur cette courbe, la série $\sum \frac{A_n}{z - a_n}$ convergera. En effet, en mettant à part les termes relatifs aux cercles rencontrés, termes qui sont en nombre fini et qui ne peuvent influer sur la convergence, la somme des modules des autres termes sera inférieure à $\sum \frac{|A_n|}{r_n}$ et, par suite, la série proposée convergera, puisque cette dernière converge.

Cherchons d'abord les droites rencontrant un nombre limité de cercles r_n. Je dis qu'il y en a une infinité parallèles à une direction quelconque et comprises entre deux parallèles données à cette direction. Soient, en effet, D et D' ces deux droites (*fig.* 4). Considérons ceux des cercles r_n compris entre ces deux droites et projetons-les sur une perpendiculaire AB à D et D'. La portion de AB recouverte par ces projections est inférieure ou égale à $2\sum r_n$. Or on peut toujours prendre n' assez grand pour que

Fig. 4.



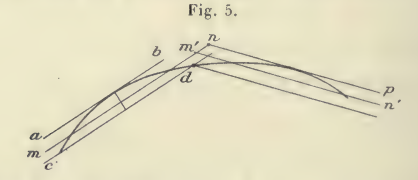
$$2\sum_{n'+1}^{\infty} r_n < AB.$$

Il y aura donc des points de AB extérieurs à tous ceux des segments $2r_n$ d'indice supérieur à n'. Si par ces points on mène

une parallèle à D, elle coupera un nombre limité de cercles r_n. Ces droites formeront une infinité non dénombrable.

Il résulte de là qu'on peut tracer un contour polygonal rencontrant un nombre limité de cercles r_n et aussi voisin qu'on voudra d'une courbe donnée quelconque C (*fig.* 5). Donnons-nous en effet un nombre ε. Traçons une tangente ab à la courbe C et, du même côté que la courbe par rapport à cette tangente, menons la parallèle cd à cette tangente à la distance ε. Entre ces deux droites il y aura au moins une droite mn rencontrant un nombre limité de cercles r_n. Soit n le premier point de cette droite qui soit à la

Fig. 5.



distance ε de la courbe. De ce point menons une tangente np à la courbe et recommençons. Nous trouvons une droite parallèle à np, soit $m'n'$, rencontrant un nombre limité de cercles r_n. Deux côtés consécutifs du polygone que nous cherchons seront formés par mm' et $m'n'$. En continuant ainsi, on formera un contour polygonal d'un nombre limité de côtés (limité en fonction de ε), coupant par suite un nombre limité de cercles r_n, et dont tous les points seront à une distance de C inférieure à ε. On peut même montrer l'existence de courbes jouissant des mêmes propriétés. Nous désignerons ces contours, rectilignes ou non, sous le nom de *courbes de convergence*.

Sur une telle courbe, la série $\sum \frac{A_n}{z - a_n}$ est uniformément convergente et définit une fonction continue. De plus, elle est intégrable terme à terme. Son intégrale est la série

$$\sum A_n \log(z - a_n).$$

On pourra donc écrire, en appelant C une courbe de convergence fermée,

$$\int_C f(z)\,dz = \left[\sum A_n \log(z - a_n)\right]_C.$$

La valeur du second membre est $2i\pi\sum A_n$ étendue à tous les pôles intérieurs au contour C. C'est là une extension de la formule de Cauchy; le contour C peut, en effet, traverser des régions où la fonction cesse d'être analytique.

Nous allons en déduire une conséquence importante. La fonction $f(z)$ ne peut être nulle sur toutes les courbes C sans être nulle en tous les points du plan. En effet, on aurait alors, quelle que soit la courbe de convergence C,

$$\sum_{C} A_n = 0.$$

Mais, si l'on fait la somme des résidus de tous les pôles, on obtient certainement une série convergente. Il en résulte que $A_h = 0$, quel que soit h. En effet, on pourra toujours trouver un nombre p tel que

$$\sum_{p+1} |A_n| < |A_h|$$

(le nombre p est évidemment supérieur à h). Figurons alors les points $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Nous pourrons toujours trouver une courbe de convergence C renfermant le point a_h et ne renfermant pas les points $a_1, a_2, \ldots, a_p$; il suffit de considérer une courbe quelconque jouissant de cette propriété, et l'on pourra toujours trouver une courbe de convergence assez voisine de cette courbe pour qu'elle remplisse les mêmes conditions. Appliquons alors à la courbe C le théorème précédent. Nous aurons

$$\sum_{C} A_n = 0.$$

Les pôles intérieurs à C sont a_h et d'autres pôles d'indices tous supérieurs à p. On aura donc

$$A_h + A_{p+k} + \ldots = 0.$$

Cette somme ne peut être nulle, car son module est supérieur à

$$|A_h| - |A_{p+k} + \ldots|,$$

expression certainement positive et non nulle.

VII. — *Fractions non décomposées en éléments simples.*

On en conclut que deux fonctions ne peuvent prendre les mêmes valeurs sur toutes les courbes C sans être identiques.

Nous allons étendre les résultats précédents à des séries de fractions rationnelles non décomposées en éléments simples. On pourrait objecter que cette étude est inutile, puisque toute fraction rationnelle peut être décomposée en éléments simples. Mais rappelons que les résultats obtenus ne s'appliquent que lorsque certaines conditions sont remplies. Nous allons voir que certains de ces résultats pourront subsister pour des fractions rationnelles non décomposées en éléments simples, même quand les conditions analogues ne seraient plus vérifiées après la décomposition.

Un exemple le montre immédiatement. Considérons le cas très simple d'une série de la forme

$$\sum \frac{A_n}{(z-a_n)(z-b_n)}.$$

Si on la décomposait en éléments simples, on aurait

$$\sum \frac{A_n}{b_n-a_n}\left(\frac{1}{z-a_n}-\frac{1}{z-b_n}\right).$$

Il serait donc nécessaire, pour pouvoir appliquer la théorie précédente, de supposer la convergence de la série

$$\sum \frac{|A_n|}{|b_n-a_n|}.$$

Traçons autour des points a_n et b_n des cercles de rayon r_n (pouvant d'ailleurs empiéter l'un sur l'autre). Il est bien évident que la convergence de la série précédente n'est nullement une conséquence de la convergence de la série $\sum \frac{|A_n|}{r_n^2}$. Quelque rapidement que converge cette dernière série, on peut, en effet, se donner a_n et en déduire b_n de manière que la première série diverge : on prendra par exemple

$$b_n = a_n + \frac{A_n}{r_n^2}.$$

Je dis d'autre part que, pour pouvoir obtenir des résultats

équivalents aux précédents, il suffit de supposer convergente la série $\sum \frac{|A_n|}{r_n^2}$. Prenons, en effet, dans cette hypothèse, un point z extérieur à la fois aux cercles précédents. On aura alors

$$|z - a_n| > r_n,$$
$$|z - b_n| > r_n,$$

et, par suite, les modules des termes de la série de fractions rationnelles seront moindres que ceux de la série $\sum \frac{A_n}{r_n^2}$. On pourra alors établir l'existence de courbes rencontrant un nombre limité de cercles r_n, et les raisonnements précédents pourront être répétés textuellement. Le résultat énoncé est donc bien établi, et l'on voit bien que les hypothèses que nous avions été conduits à faire précédemment ne sont pas indispensables pour l'application du résultat.

Cherchons dans le cas actuel à étendre le théorème de Cauchy. Considérons donc une courbe de convergence C et recherchons quels pôles elle renferme à son intérieur. A un terme de la série répondent deux pôles, et deux cas sont à distinguer suivant que tous deux sont intérieurs à la courbe C ou qu'un seul lui est intérieur. Nous aurons la formule

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C f(z)\,dz = \sum\left(\sum \rho_n\right),$$

ρ_n désignant le résidu relatif à un des pôles a_n ou b_n. Mais aux deux points a_n, b_n répondent des résidus opposés. Les résidus relatifs aux pôles de la première catégorie ne figureront donc pas dans le second membre de l'égalité précédente.

Au contraire, ces pôles interviendront si l'on considère le développement un peu plus général

$$\sum \frac{A_n + B_n z}{(z - a_n)(z - b_n)} = \frac{A_n + B_n b_n}{b_n - a_n}\,\frac{1}{z - b_n} + \frac{A_n + B_n a_n}{a_n - b_n}\,\frac{1}{z - a_n},$$

les résidus relatifs à a_n et b_n ne se détruisant plus. Il peut alors arriver que plusieurs des a_n soient égaux. Il convient dès lors de se demander dans quel cas un tel point sera encore un pôle de la série. En extrayant de la série tous les termes qui renferment a_n, nous aurons à considérer la série de ses résidus. Si elle converge,

il n'y a pas de difficulté : le point a_n est un pôle de la série; sinon, on n'a plus le droit de le dire.

Considérons enfin un développement en série de fractions rationnelles quelconques

$$f(z) = \sum \frac{P_n(z)}{Q_n(z)},$$

P_n, Q_n étant deux polynomes en z dont nous supposerons les degrés limités. On peut de plus, sans diminuer la généralité, supposer le degré de P inférieur à celui de Q. En effet, il existe au moins une valeur α de z rendant la série convergente. Posons alors

$$z = \alpha + \frac{1}{Z};$$

nous aurons

$$F(z) = f\left(\alpha + \frac{1}{Z}\right) = \sum \frac{P_n\left(\alpha + \frac{1}{Z}\right)}{Q_n\left(\alpha + \frac{1}{Z}\right)}.$$

Retranchons de chaque terme l'expression $\frac{P_n(\alpha)}{Q_n(\alpha)}$. Cela revient à retrancher de la fonction une quantité constante et limitée. On pourra donc écrire

$$f(z) = \sum \left[\frac{P_n\left(\alpha + \frac{1}{Z}\right)}{Q_n\left(\alpha + \frac{1}{Z}\right)} - \frac{P_n(\alpha)}{Q_n(\alpha)}\right] + f(\alpha).$$

Chacun des termes entre crochets s'annule pour Z infini. On pourra donc écrire tous les termes sous la forme d'une fraction rationnelle dans laquelle le degré du dénominateur surpasse celui du numérateur; c'est justement ce que nous voulions établir. Enfin nous supposerons le coefficient de la plus haute puissance de z dans Q_n égal à 1. Nous poserons

$$Q_n = z^m + B_m^1 z^{m-1} + \ldots + B_n^m = (z - a_n)(z - b_n)\ldots(z - k_n)$$

et

$$P_n = A_n^1 z^{m-1} + \ldots + A_n^m.$$

Supposons qu'il existe une série convergente $\sum u_n$ telle que

$$|A_n^p| < u_n^{m+1}.$$

Décrivons alors autour de chacun des pôles un cercle de rayon $|ku_n|$ et un cercle de rayon R ayant pour centre l'origine. Dans la région intérieure à ce cercle et extérieure aux premiers, nous aurons

$$\left|\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}\right| < \frac{u_n^{m+1}(R^{m+1}+\ldots+1)}{k^m u_n^m} < K u_n,$$

K désignant une constante déterminée. Alors la série de fractions rationnelles sera uniformément convergente dans l'aire considérée. Il faut, bien entendu, choisir le nombre k de manière qu'il y ait effectivement des points intérieurs au grand cercle et extérieurs aux petits.

VIII. — *Cas où la distribution des pôles est quelconque.*

Nous allons maintenant étudier d'une manière très générale la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples. Considérons d'abord l'intégrale

$$\int_C \frac{f(z)}{\varphi(z)} dz,$$

f et φ étant deux fonctions entières en z. La valeur de cette intégrale est, au facteur $2i\pi$ près, la somme des résidus de $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ relatifs aux pôles intérieurs à C. On aura

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{\varphi(z)} = 2i\pi \sum \frac{f(a)}{\varphi'(a)}.$$

Appliquons cette formule à la fonction $\frac{F(z)}{\Phi(z)(z-x)}$, on aura

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{F(z)\,dz}{\Phi(z)(z-x)} = \frac{F(x)}{\Phi(z)} - \sum \frac{F(a_n)}{\Phi'(a_n)} \frac{1}{x-a_n},$$

en supposant le point $z = x$ intérieur au contour C et les zéros de Φ tous simples.

Supposons alors qu'on puisse trouver une suite de contours C_1, C_2, ..., C_k tels que chacun d'eux renferme le précédent et tels que l'intégrale du premier membre tende vers zéro quand ces contours s'éloignent tout entiers à l'infini. Le nombre des termes

du second membre croît alors indéfiniment, et l'on a ainsi obtenu une décomposition de la fonction $\frac{F}{\Phi}$ en série de fractions rationnelles.

Mais nous allons tâcher d'arriver au même résultat en ne supposant pas l'existence de tels contours, hypothèse qui est en somme assez restrictive. Nous supposerons qu'en introduisant au dénominateur une puissance convenable de z l'intégrale puisse tendre vers zéro. Nous écrirons alors l'égalité

$$\frac{1}{2i\pi}\int\frac{F(z)\,dz}{z^m\,\Phi(z)\,(z-x)} = \frac{F(x)}{x^m\,\Phi(x)} - \sum\frac{F(a_n)}{a_n^m\,\Phi(a_n)}\,\frac{1}{x-a_n} + R,$$

R désignant le résidu relatif au pôle $z = 0$.

Pour calculer R, posons

$$\frac{F(z)}{\Phi(z)} = A_0 + A_1 z + \ldots + A_m z^m + \ldots.$$

On a aussi

$$\frac{1}{z-x} = -\frac{1}{x} - \frac{z}{x^2} - \ldots.$$

Le coefficient de z^{m-1} dans le produit $\frac{F(z)}{\Phi(z)}\,\frac{1}{z-x}$ sera

$$R = -\frac{A_0}{x^m} - \frac{A_1}{x^{m-1}} - \ldots - \frac{A_{m-1}}{x}.$$

S'il existe alors une valeur de m pour laquelle l'intégrale du premier membre tend vers zéro quand les contours C s'éloignent à l'infini, on en déduira le développement

$$\frac{F(x)}{\Phi(x)} = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-1}x^{m-1} + \sum\frac{F(a_n)}{\Phi(a_n)}\,\frac{x^m}{a_n^m}\,\frac{1}{x-a_n} \quad (^1).$$

Transformons l'expression de la manière suivante : posons, suivant une notation que nous avons déjà employée,

$$\left(\frac{1}{x-a_n}\right)_m = -\frac{1}{a_n} - \frac{x}{a_n^2} - \ldots - \frac{x^{m-1}}{a_n^m}.$$

---

(1) On peut, par exemple, obtenir sous cette forme un développement en série de $\cot z$. On trouvera le calcul détaillé dans le *Cours autographié de M. Hermite.*

Si alors nous remarquons que l'on a

$$\frac{1}{x-a_n}+\frac{1}{a_n}+\ldots+\frac{x^{m-1}}{a_n^m}=\frac{x^m}{a_n^m}\,\frac{1}{x-a_n},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{x-a_n}-\left(\frac{1}{x-a_n}\right)_m=\frac{x^m}{a_n^m}\,\frac{1}{x-a_n};$$

la formule deviendra

$$\frac{F(x)}{\Phi(x)}=A_0+A_1x+\ldots+A_{m-1}x^{m-1}+\sum\frac{F(a_n)}{\Phi(a_n)}\left[\frac{1}{x-a_n}-\left(\frac{1}{x-a_n}\right)_m\right].$$

Nous allons généraliser ce développement en supposant que l'entier m varie avec le contour C_k d'intégration. Considérons l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C_k}\frac{x^m F(z)\,dz}{z^m(z-x)\Phi(z)}$$
$$=\frac{F(x)}{\Phi(x)}-\sum\frac{F(a_n)}{\Phi(a_n)}\left[\frac{1}{x-a_n}-\left(\frac{1}{x-a_n}\right)_m\right]+\Pi_{m-1}(x),$$

Π_{m-1} désignant un polynome de degré $m-1$: c'est le résidu relatif au pôle $z=0$. Nous allons supposer que m varie avec k; une difficulté se présente alors. Dans la méthode précédente, quand on passe d'un contour d'intégration au suivant, on introduit de nouveaux termes de la série, mais on n'altère pas les premiers. Il n'en sera plus de même si m est variable. Pour éviter cette difficulté, nous allons transformer la formule précédente. Appelons I_k l'intégrale le long du contour C_k. Nous aurons

$$I_k=I_1+(I_2-I_1)+\ldots+(I_k-I_{k-1}).$$

Désignons par Γ_1 le contour C_1, par Γ_2 l'ensemble du contour C_2 et du contour C_1 parcouru dans le sens négatif, etc., par Γ_k l'ensemble du contour C_k et du contour C_{k-1} parcouru dans le sens négatif. Nous aurons

$$I_k=\int_{\Gamma_1}+\int_{\Gamma_2}+\ldots+\int_{\Gamma_k}.$$

Le premier membre de la formule devient alors

$$\frac{1}{2i\pi}\left[\int_{\Gamma_1}\frac{x^m F(z)\,dz}{z^m(z-x)\Phi(z)}+\int_{\Gamma_2}+\ldots\right].$$

Nous choisirons l'entier variable λ_k, de sorte que la série dont le terme général est

$$\int_{\Gamma_k} \frac{x^{\lambda_k} \mathrm{F}(z)\, dz}{z^{\lambda_k} \Phi(z)(z-x)}$$

soit convergente. Nous montrerons que ce choix est possible et que cette série représente une fonction entière. Comme, d'autre part, la différence entre cette série et la fonction proposée $\frac{\mathrm{F}(x)}{\Phi(x)}$ est une série de fractions rationnelles, le développement que nous avions en vue se trouvera établi.

Supposons que les contours Γ_k ne contiennent aucun pôle. Alors, sur un de ces contours, $\frac{\mathrm{F}(z)}{\Phi(z)}$ admet un module maximum M_k. Soit aussi δ_k le minimum de $|z-x|$. Enfin soit L_k la longueur du contour. Du moment que x est fixe quand le contour Γ_k s'éloigne à l'infini, δ_k croîtra indéfiniment. Posons encore $|z| = \mathrm{R}$ et soit R_k le minimum de $|z|$. On trouve alors sans peine comme limite supérieure de l'intégrale

$$\frac{\mathrm{M}_k \mathrm{L}_k}{\delta_k} \frac{\mathrm{R}^{\lambda_k}}{\mathrm{R}_k^{\lambda_k}}.$$

On peut évidemment toujours choisir les λ_k de façon que la série dont nous venons d'écrire le terme général converge. La série d'intégrales convergera uniformément quand x se déplacera dans une région limitée quelconque du plan.

Pour montrer qu'elle définit une fonction entière, considérons le contour Γ_k, qui renferme le point x entre les deux portions C_k et C_{k-1} dont il se compose. On aura

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_k} \frac{x^{\lambda_k} \mathrm{F}(z)\, dz}{z^{\lambda_k} \Phi(z)(z-x)} = \frac{\mathrm{F}(x)}{\Phi(x)} + \sum \frac{\mathrm{F}(a_n)}{\Phi(a_n)} \frac{x^{\lambda_k}}{a_n^{\lambda_k}(z-x)}.$$

En faisant alors l'opération inverse de celle de tout à l'heure, c'est-à-dire en décomposant Γ_k en deux contours, nous trouverons pour valeur de la série d'intégrales la nouvelle série

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{C}_1} \frac{\mathrm{F}(z)}{\Phi(z)} \left(\frac{x^{\lambda_1}}{z^{\lambda_1}} - \frac{x^{\lambda_2}}{z^{\lambda_2}} \right) \frac{dz}{z-x} + \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{C}_2} \frac{\mathrm{F}(z)}{\Phi(z)} \left(\frac{x^{\lambda_2}}{z^{\lambda_2}} - \frac{x^{\lambda_3}}{z^{\lambda_3}} \right) \frac{dz}{z-x} + \ldots.$$

C'est là visiblement une série de polynomes en x, car chacun

des crochets $\frac{x^{\lambda_k}}{z^{\lambda_k}} - \frac{x^{\lambda_{k+1}}}{z^{\lambda_{k+1}}}$ s'annule pour $z = x$. Nous trouvons finalement une série de la forme

$$H(x) = \int_{C_1} \varphi_0(z)\,dz + x \int_{C_1} \varphi_1(z)\,dz + x^2 \int_{C_2} \varphi_2(z)\,dz + \ldots,$$

et, comme nous sommes assurés que cette série entière converge dans toute aire limitée du plan, elle représente nécessairement une fonction entière.

Le développement est donc établi. Il permet de retrouver le théorème de M. Mittag-Leffler en supposant qu'entre deux contours consécutifs C_k et C_{k+1} figure un seul pôle.

Nous allons préciser nos hypothèses sur la fonction méromorphe en supposant que le numérateur et le dénominateur sont deux fonctions entières à croissance régulière d'ordre ρ. Nous allons montrer que l'on peut choisir les contours C_k et les entiers λ_k de façon que l'ordre de la fonction entière $H(x)$ ne dépasse pas ρ.

Pour ne pas avoir de trop grandes valeurs pour l'entier λ_k, il faudra s'arranger pour que, sur les contours C_k, la fonction $F(z)$ ne soit pas trop petite. Or, en vertu du théorème de M. Hadamard, on peut choisir des contours C s'éloignant à l'infini et sur lesquels on ait constamment

$$|F(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}, \qquad |z| = r.$$

Nous savons de plus que les intervalles où l'on ne peut pas choisir de tels contours sont infiniment petits par rapport à ceux où l'on peut les choisir. Nous prendrons pour contours des cercles C_n dont les rayons R_n vérifieront les inégalités

$$\frac{3}{2} R_{n-1} < R_n < 2 R_{n-1}.$$

Prenons alors

$$|x| = \frac{R_n + R_{n-1}}{2}.$$

Calculons le minimum du module de $z - x$ quand le point z parcourt le contour C_n. On a

$$|z - x| > R_n - |x| = |x| - R_{n-1} > \frac{1}{2} R_{n-1} > \frac{1}{4} R_n.$$

Pour les valeurs n' de l'indice n supérieures à la précédente,

on aura *a fortiori*

$$|z-x| > \frac{1}{4}R_{n'}.$$

D'autre part, soit M_n le maximum de $\left|\frac{G(z)}{F(z)}\right|$ sur le contour C_n. Nous pourrons prendre

$$M_n = e^{R_n^{\rho+\varepsilon_n}},$$

puisque la fonction G est d'ordre ρ, et les valeurs positives de ε_n tendront vers zéro. On voit alors que l'on a

$$|H(x)| < \sum 2\frac{M_n|x|^{\lambda_n}}{\frac{R_n}{4}\left(\frac{R_n}{2}\right)^{\lambda_n}}.$$

Nous montrerons dans un instant que le second membre est une fonction entière dont nous allons évaluer l'ordre. En prenant à cet effet la racine $\lambda_n^{\text{ième}}$ du terme général, on obtient

$$\frac{2x e^{R_n^{\varepsilon_n-\eta_n}}}{R_n}\sqrt[\lambda_n]{\frac{8}{R_n}}$$

en prenant

$$\lambda_n = R_n^{\rho+\eta_n}.$$

Nous supposerons η_n supérieur à la fois à $2\varepsilon_n$ et à $\frac{1}{\sqrt{n}}$ (et tel, naturellement, que λ_n soit entier). Alors $\eta_n - \varepsilon_n$ sera supérieur à $\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot$ En remarquant alors que $R_n < 2^n R$, l'expression précédente peut s'écrire

$$\frac{2x}{R_n}(1+\theta_n),$$

θ_n tendant vers o quand n croît indéfiniment. L'ordre de la fonction entière est la limite du rapport

$$\frac{\log\lambda_n}{\log R_n}.$$

La fonction entière est donc d'ordre ρ. La fonction $H(x)$ étant inférieure à une fonction d'ordre ρ sur une infinité de cercles de rayons indéfiniment croissants et *suffisamment rapprochés* (1), elle est elle-même d'ordre au plus égal à ρ.

(1) Cette dernière condition est essentielle, sans quoi la fonction pourrait être d'ordre supérieur.

Reste à montrer que la fonction considérée à l'instant est bien une fonction entière. La démonstration se fera absolument de la même manière. On voit, en reprenant les mêmes calculs, que, en choisissant les entiers λ_n comme nous l'avons fait, la racine $\lambda_n^{\text{ième}}$ du terme général tend vers o avec $\frac{1}{n}$, quel que soit x.

En définitive, nous obtenons un développement de la forme

$$\frac{G(z)}{F(z)} = H(z) + \sum \left[\frac{Q_n(z)}{R_n(z)} - \left(\frac{R_n(z)}{R_n(z)} \right)_{\lambda_n} \right].$$

Cherchons à décomposer en éléments simples chacun des termes sous le signe $\sum$. Posons, à cet effet,

$$\frac{Q_n(z)}{R_n(z)} = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{A_{n,p}}{z - a_{n,p}}.$$

Pour avoir les λ_n premiers termes du développement de $\frac{Q_n(z)}{R_n(z)}$, on formera les λ_n premiers termes de chacune des fractions simples $\frac{1}{z - a_{n,p}}$. On trouve sans peine

$$\frac{G(z)}{F(z)} = H(z) + \sum \left(\sum_{p=1}^{p=n} \frac{z^{\lambda_n}}{a_{n,p}^{\lambda_n}(z - a_{n,p})} \right).$$

Chacun des termes a maintenant un seul pôle. Mais il importe de remarquer que, dans le cas où l'on n'a pas affaire à une distribution ordinaire de zéros, on n'a pas le droit de séparer les termes de la deuxième somme. En d'autres termes, si l'on écrit le double signe de sommation sans mettre de parenthèses, il peut arriver que l'on n'obtienne plus ainsi une série convergente.

Étudions, en particulier, l'exemple suivant. Soit la fonction méromorphe

$$\frac{G(z)}{F(z)} = \sum \frac{1}{(z - n)(z - n - \varepsilon_n)},$$

ε_n étant provisoirement indéterminé, mais inférieur à 1. Cette série converge comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$. Nous pourrons prendre

pour $F(z)$ le produit convergent

$$F(z)=\prod\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}\left(1-\frac{z}{n+\varepsilon_n}\right)e^{\frac{z}{n+\varepsilon_n}}.$$

Décomposons le terme général en éléments simples, nous obtenons

$$\sum\frac{1}{\varepsilon_n}\left(\frac{1}{z-n-\varepsilon_n}-\frac{1}{z-n}\right).$$

Si l'on sépare les deux termes, la série peut ne plus converger. Si, par exemple, $\varepsilon_n=\frac{1}{n^3}$, en séparant les deux termes, on obtient une série dont les termes

$$\frac{n^2}{z-n-\frac{1}{n^2}}-\frac{n^2}{z-n}$$

croissent indéfiniment avec n. Pour rétablir la convergence, on pourra développer en série chacun des termes. Si nous prenons, d'une manière un peu plus générale, $\varepsilon_n=\frac{1}{n^p}$, nous écrirons le terme général sous la forme

$$n^p\left[\frac{z^{q+1}}{(n+\varepsilon_n)^{q+1}(z-n-\varepsilon_n)}-\frac{z^{q+1}}{n^{q+1}(z-n)}\right]$$

$$-n^p\left[\frac{1}{n+\varepsilon_n}+\frac{z}{(n+\varepsilon_n)^2}+\ldots+\frac{z^q}{(n+\varepsilon_n)^{q+1}}-\frac{1}{n}-\frac{z}{n^2}-\ldots-\frac{z^q}{n^{q+1}}\right].$$

Les deux premiers termes pourront être séparés sans inconvénient, pourvu que $q+1>p$. Quant à la deuxième partie, elle donne lieu à une fonction entière, puisque c'est une série de polynomes convergente dans tout le plan (c'est même ici un polynome).

On pourra appliquer des considérations analogues au cas où ε_n décroîtrait plus rapidement, où l'on aurait, par exemple,

$$\varepsilon_n=\frac{1}{n^n},$$

mais on serait obligé alors de prendre q fonction de n. En appliquant la même décomposition, on voit qu'il suffit de prendre $q_n>n$ pour assurer la convergence. Le terme général est, en effet,

comparable à

$$\frac{z^{q_n}}{n^{q_n - n}}.$$

Prenons pour q_n le plus petit nombre entier supérieur à

$$n\left(1+\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right).$$

La racine $q_n^{\text{ième}}$ du terme général est alors

$$\frac{z}{e^{\frac{q_n - n}{q_n}\log n}} = \frac{z}{e^{\sqrt{\log n}+\varepsilon}};$$

elle tend vers o.

Quant à la série de polynomes, elle converge nécessairement dans tout le plan et représente une fonction entière. Cherchons son ordre. Le terme général étant comparable à

$$n^n \frac{z^{q_n}}{n^{q_n+1}},$$

nous chercherons d'abord la racine $q_n^{\text{ième}}$ du dénominateur. C'est

$$n^{\frac{q_n - n + 1}{n}}.$$

L'ordre de la fonction sera la limite de

$$\frac{\log q_n}{\log n^{\frac{q_n - n + 1}{n}}}.$$

L'ordre est donc infini. Nous avons donc bien un développement analogue au développement général, avec cette différence que la fonction entière à introduire est d'ordre infini.

On peut d'ailleurs éviter cette fonction d'ordre infini en groupant ensemble les deux termes correspondants de la série de polynomes

$$n^{q_n}\left[\frac{1}{(n+\varepsilon_n)^{q_n}} - \frac{1}{n^{q_n}}\right].$$

On a, par une dérivation, la valeur approchée de la parenthèse. C'est

$$-\frac{\varepsilon_n q_n}{n^{q_n+1}}.$$

Nous aurons alors affaire à une fonction d'ordre *un* seulement

$$\sum \frac{q_n z^{q_n}}{n^{q_n+1}}.$$

Considérons enfin le cas encore plus compliqué où l'on a

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n^{n^n}}.$$

Les calculs sont les mêmes. Indiquons seulement les résultats. Il faudra prendre

$$q_n > n^n \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\log n}}\right).$$

Quant à la série de polynomes elle est d'ordre infini, et, même en réunissant les termes deux par deux comme dans le cas précédent, elle reste d'ordre infini.

Pour éviter la fonction d'ordre infini, le mieux sera alors de se borner au développement primitif où les deux pôles très rapprochés ne sont pas séparés. On pourrait aussi avoir une décomposition en éléments simples sans fonction entière, mais, comme nous l'avons déjà fait remarquer, il serait nécessaire d'abandonner le bénéfice de la forme canonique.

IX. — *Remarques sur la distribution extraordinaire.*

L'exemple que nous avons choisi peut paraître un peu artificiel. Or, il est essentiel de distinguer entre les fonctions que l'on construit tout exprès pour qu'elles ne possèdent pas une propriété donnée, et les fonctions qui se présentent naturellement en Analyse. Il est souvent facile, étant donnée une propriété, de construire une fonction qui n'en jouisse pas, mais il faudra alors se demander si l'on a des chances de rencontrer une telle fonction.

Or nous allons montrer que, dans le cas qui nous occupe, on peut avoir fréquemment une distribution de zéros analogue à celle que nous venons d'étudier. Prenons, par exemple, pour $F(z)$, la fonction très simple

$$F(z) = \sin z \sin \frac{z}{\alpha}.$$

Les pôles de la fonction méromorphe seront

$$z = k\pi,$$
$$z = \alpha h\pi,$$

h et k étant deux entiers quelconques positifs ou négatifs. La distance de deux pôles sera

$$(\alpha h - k)\pi.$$

On peut prendre pour α une valeur telle que, pour une infinité de valeurs de h, cette distance soit très petite, pour que l'on ait, par exemple,

$$|\alpha h - k| < \frac{1}{h^{h^h}}.$$

On peut déterminer le développement de α sous forme de fraction continue de façon que cette condition soit remplie. On aura donc bien une distribution extraordinaire de zéros et cependant la fonction choisie pour dénominateur de la fonction méromorphe se présente assez naturellement. Quant à la constante α, on peut montrer qu'elle n'est pas algébrique et même qu'elle n'est pas racine d'une équation prise dans le corps obtenu en adjoignant le nombre e au domaine naturel de rationalité. L'introduction de telles constantes en Analyse est la source de grandes difficultés; nous venons d'en voir un exemple et l'on pourrait en citer beaucoup d'autres. Ces difficultés peuvent paraître artificielles et *le sont en effet probablement,* mais on ne pourrait les exclure que si l'on construisait toute l'Analyse d'une manière systématique en partant des nombres entiers et si l'on démontrait que ces constantes *ne peuvent pas s'introduire dans un tel système.*

Ce qui précède nous a conduits à dire quelques mots de la distribution extraordinaire des pôles. Nous allons montrer maintenant, comme nous l'avions déjà annoncé au début du Chapitre, les relations intimes de cette distribution avec la croissance de la dérivée $F'(z)$.

Considérons une fonction méromorphe $\frac{G(z)}{F(z)}$ d'ordre ρ. Soit a un pôle de cette fonction; on aura, pour des valeurs de $|a|$ suffisamment grandes,

$$|G(a)| < e^{|a|^{\rho+\varepsilon}}.$$

Il peut d'ailleurs y avoir des valeurs de $|a|$ ne vérifiant pas cette inégalité, mais cela importe peu. Nous supposerons que l'on a en

même temps

$$|F'(a)| < e^{-|a|^{\rho'}} \qquad (\rho' > \rho)$$

et, pour préciser, nous dirons qu'il y a distribution extraordinaire des pôles de la fonction si une telle inégalité est vérifiée pour une infinité de pôles (de modules indéfiniment croissants par suite). Le cas où un nombre limité de pôles vérifierait une telle inégalité ne mérite pas d'être étudié à part. Il faut, en effet, remarquer que le fait d'assujettir une fonction à un nombre limité de conditions n'entraîne aucune conséquence sur sa nature à l'infini. Cela nous montre en passant combien peut être difficile l'étude à distance finie des fonctions entières, c'est-à-dire d'un groupe de fonctions caractérisées par une propriété commune à l'infini; mais cela a, par contre, l'avantage de nous empêcher de faire cette étude qu'il est à peu près impossible de faire.

Nous allons montrer que la définition précédente de la distribution extraordinaire entraîne l'existence d'une infinité de couples de pôles indéfiniment rapprochés. Supposons d'abord que la dérivée première seule vérifie une telle inégalité et que l'on ait, au contraire,

$$|F''(a)| > e^{-|a|^{\rho}}.$$

Je dis que la fonction $F(z)$ a nécessairement un zéro voisin de a. Il suffit de montrer que l'équation

$$F(a+x) = F(a) + \frac{x}{1} F'(a) + \frac{x^2}{2} F''(a) + \ldots = 0$$

a une racine très petite. En remarquant que $F(a) = 0$ et en supprimant la racine $x = 0$, on obtient l'équation

$$\varphi(x) + \psi(x) = 0,$$

en posant

$$\varphi(x) = F'(a) + \frac{x}{2} F''(a),$$

$$\psi(x) = \frac{x^2}{6} F'''(a) + \ldots.$$

Nous nous appuierons sur le théorème élémentaire suivant :

Si l'on a une équation de la forme $\varphi + \psi = 0$ *et un contour simple* C *sur lequel on a constamment*

$$|\psi(x)| < |\varphi(x)|,$$

l'équation proposée a, dans le contour C, *le même nombre de racines que l'équation* $\varphi = 0$.

Prenons pour contour C un cercle de rayon R égal à

$$4\left|\frac{F'(a)}{F''(a)}\right|.$$

On aura sur ce contour

$$|\varphi(x)| > |F'(a)|,$$

car $|\varphi(x)|$ est supérieur à la différence des modules de xF'' et F'. Au contraire, on a

$$|\psi(x)| < \frac{1}{6}|F'''(a)|\left|\frac{F'(a)}{F''(a)}\right|^2 + \ldots.$$

Il faut faire ici un calcul long et assez délicat pour montrer que le second membre est inférieur à $|F'(a)|$. Nous nous contenterons d'en indiquer les principaux traits. D'abord la fonction $F(z)$ étant d'ordre ρ, ses dérivées sont d'ordre ρ au plus. On en conclut une limitation de ces dérivées de la forme suivante :

$$\frac{1}{6}F'''(a) < A e^{|a|^{\rho+\varepsilon}}.$$

On en déduit, en remplaçant dans l'expression de tout à l'heure divisée par $F'(a)$ les dérivées par ces valeurs, une valeur supérieure au module de chacun des termes de la forme

$$A e^{|a|^{\rho+\varepsilon}+2|a|^{\rho}-|a|^{\rho'}}.$$

L'exposant croît indéfiniment par valeurs négatives à cause de l'inégalité $\rho' > \rho$. Comme il y a une infinité de termes, il y a encore lieu de faire l'étude de la somme de ces expressions. On en conclut finalement que cette expression est inférieure à 1, et alors le théorème rappelé il y a un instant s'applique; au pôle a est donc associé un second pôle b et la distance de ces deux pôles est

$$|a - b| < 4\left|\frac{F'(a)}{F''(a)}\right|.$$

Il ne faudrait pas conclure qu'à *tout* pôle a vérifiant l'inégalité d'où nous sommes partis réponde un second pôle b très rapproché, mais nous avons seulement montré que, s'il y a une infinité de pôles a vérifiant l'inégalité, ils sont rapprochés deux par deux

suivant la loi précédente, sauf peut-être un nombre limité d'entre eux.

Remarquons que l'on a

$$|a-b| < e^{-|a|^{\rho'-\varepsilon}}.$$

La fonction $\frac{1}{|a-b|}$ est donc plus rapidement croissante que la fonction entière elle-même.

Nous allons maintenant démontrer la réciproque. Si les pôles se rapprochent deux par deux, comme l'indique l'inégalité précédente, la dérivée première vérifie nécessairement une inégalité telle que celle dont nous sommes partis. Reprenons en effet l'équation

$$F'(a) + \frac{x}{2} F''(a) + \ldots = 0.$$

Si l'on avait

$$|F'(a)| > e^{-|a|^{\rho}},$$

l'équation ne saurait avoir de racine dans un cercle dont le rayon est de cet ordre de grandeur. Prenons

$$|x| = e^{-|a|^{\rho+\eta}}$$

et montrons qu'il n'y a pas de racine de module inférieur. On a en effet

$$|F''(a)| < e^{|a|^{\rho+\varepsilon}},$$

et l'on peut vérifier une telle inégalité pour une valeur de ε inférieure à η. Alors le premier terme est supérieur en module à $e^{-|a|^{\rho}}$; le second, au contraire, est inférieur à

$$e^{-|a|^{\rho+\eta}+|a|^{\rho+\varepsilon}}.$$

Cette expression tend vers zéro plus rapidement que la première. On verra de même que tous les autres termes tendent vers zéro plus rapidement que le premier. On recommencera alors le même raisonnement que précédemment. On mettra l'équation sous la forme $\varphi(x) + \psi(x) = 0$ en posant $\varphi(x) = F'(a)$. Cette équation aura autant de racines que l'équation $\varphi(x) = 0$ dans le cercle de rayon $e^{-|a|^{\rho+\eta}}$ et le résultat annoncé en résulte.

Donc, en résumé, l'hypothèse faite sur la croissance de la dérivée première revient à l'hypothèse que les pôles sont deux par deux indéfiniment rapprochés.

NOTE I.

SUR LES ZÉROS DES FONCTIONS ENTIÈRES (¹).

Nous avons, au début du Chapitre III, étudié une partie du Mémoire de M. Lindelöf (²). Nous allons indiquer encore quelques résultats nouveaux obtenus par cet auteur et relatifs aux relations entre l'ordre de grandeur de la fonction et le nombre de ses zéros.

Posons

$$f(z) = \mathrm{R}e^{i\Phi}.$$

Considérons un cercle de rayon r. Le nombre des racines de la fonction entière $f(z)$ dans ce cercle est, on le sait, donné par la formule

$$n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\,d\varphi.$$

Or si l'on pose

$$z = re^{i\varphi},$$

on a

$$\mathrm{R}e^{i\Phi} = f(re^{i\varphi}).$$

Dérivons par rapport à r et φ en considérant R et Φ comme des fonctions de ces deux variables. Il viendra

$$\left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r} + i\frac{\partial\Phi}{\partial r}\mathrm{R}\right)e^{i\Phi} = e^{i\varphi}f'(re^{i\varphi}),$$

$$\left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \varphi} + i\frac{\partial\Phi}{\partial \varphi}\mathrm{R}\right)e^{i\Phi} = e^{i\varphi}rif'(re^{i\varphi}).$$

D'où l'on déduit

$$\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \varphi} + i\mathrm{R}\frac{\partial\Phi}{\partial \varphi} = ir\left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r} + i\frac{\partial\Phi}{\partial r}\mathrm{R}\right).$$

En égalant les parties réelles d'une part, les coefficients de i de l'autre, on obtient deux équations aux dérivées partielles dont nous écrirons seulement la seconde

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\mathrm{R} = r\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r}.$$

(¹) La rédaction des Notes I et III est due à M. Zoretti.

(²) *Acta Societatis scientiarum Fennicæ*, t. XXXI, n° 1, 1902.

Voir aussi dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXII, CXXXIII, CXXXIV et CXXXV diverses Notes de M. Pierre Boutroux et de M. Ernst Lindelöf.

Par suite

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = r \frac{\partial}{\partial r} \log R.$$

On a donc

$$n = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \log R}{\partial r} d\varphi.$$

Cette formule donne la même valeur pour n, quel que soit r, pourvu qu'il soit compris entre $|a_n|$ et $|a_{n-1}|$. En effet, n reste constant entre ces deux valeurs de r. Intégrons alors par rapport à r après avoir écrit la formule sous la forme

$$\frac{n}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \log R}{\partial r} d\varphi.$$

Nous aurons

$$n \log r + C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log R \, d\varphi,$$

C_n désignant une constante.

Pour calculer C_n, nous supposerons, dans le but de simplifier l'écriture, que, sur chaque cercle de centre O, il y a au plus un zéro de $f(z)$. Supposons r compris entre $|a_{n-1}|$ et $|a_n|$, on aura

$$(n-1) \log r + C_{n-1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log R \, d\varphi,$$

la constante n'ayant plus la même valeur, car on a traversé une discontinuité $r = |a_n|$. Le second membre, lui, reste continu. Rien n'empêche dans les deux formules de faire $r = |a_n|$, $\log R$ deviendra alors infini sur le contour d'intégration, mais cela n'introduit aucune difficulté car l'intégrale conserve une valeur finie. On aura donc

$$n \log r_n + C_n = (n-1) \log r_n + C_{n-1},$$

ce qui peut s'écrire

$$C_n = C_{n-1} - \log r_n,$$

et en appliquant la formule de proche en proche on voit que

$$C_n = C_0 - \log(r_1, r_2, \ldots, r_n).$$

Si nous supposons, comme nous savons qu'on peut le faire, qu'il n'y a pas de zéro à l'origine, on voit immédiatement que $C_0 = 0$. On aura donc la formule

$$n \log r - \log r_1 r_2 \ldots r_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log R \, d\varphi.$$

Le second membre est certainement inférieur à $\log M(r)$, mais, remar-

quons-le, pas nécessairement en valeur absolue. On aura donc [1]

$$r^n < M(r)\, r_1 r_2 \ldots r_n.$$

Ce qui fait l'intérêt de la formule, c'est qu'elle est vraie quels que soient r et n. Supposons, en effet, que r soit compris entre r_p et r_{p+1} ($p < n$). On aura alors

(1) $$\frac{r^p}{r_1 r_2 \ldots r_p} < M(r),$$

d'après la formule même. Multiplions le premier membre par les $n-p$ facteurs inférieurs à 1,

$$\frac{r}{r_{p+1}}\,\frac{r}{r_{p+2}}\cdots\frac{r}{r_n},$$

nous aurons bien

$$\frac{r^n}{r_1 r_2 \ldots r_n} < M(r).$$

Au contraire, supposons $p > n$. On aura

$$\frac{r}{r_{n+1}}\,\frac{r}{r_{n+2}}\cdots\frac{r}{r_p} > 1;$$

en divisant le premier membre de (1) par ce nombre > 1, l'inégalité reste vraie et l'on a bien

$$\frac{r^n}{r_1 r_2 \ldots r_n} < M(r).$$

De là nous déduirons *a fortiori* l'inégalité

$$\frac{1}{r_n} < \frac{\sqrt[n]{M(r)}}{r}.$$

Revenons à la première inégalité

$$\frac{1}{r_1 r_2 \ldots r_n} < \frac{M(r)}{r^n}.$$

Comme elle est vérifiée quels que soient les nombres indépendants p et n, on aura avantage à l'appliquer pour la valeur de n qui rend le second membre minimum. Posons alors

$$M(r) = e^{V(r)}.$$

Écrivons que la dérivée logarithmique du second membre $\frac{M(r)}{r^n}$ est

---

(1) Pour la démonstration qui précède, *voir* Jensen, *Acta mathematica*, t. XXII; Petersen, *Acta mathematica*, t. XXIII, et la Préface du Mémoire de M. Lindelöf.

nulle; nous aurons

$$rV'(r) = n = \psi(r).$$

Inversement nous déduirons de là r en fonction de n.

$$r = \varphi(n).$$

Nous en tirons

$$V'(r) = \frac{n}{r} = \frac{n}{\varphi(n)},$$

c'est-à-dire

$$dV(r) = \frac{n\varphi'(n)\,dn}{\varphi(n)}$$

et

$$V(r) = \int_0^n \frac{n\varphi'(n)\,dn}{\varphi(n)},$$

en supposant $M(r) = 1$ pour $n = 0$.

Notre inégalité la plus avantageuse est donc

$$\frac{1}{r_1 r_2 \dots r_n} < \frac{1}{[\varphi(n)]^n} e^{\int_0^n \frac{n\varphi'(n)\,dn}{\varphi(n)}}$$

et, *a fortiori*,

$$\frac{1}{r_n} < \frac{1}{\varphi(n)} e^{\frac{1}{n}\int_0^n \frac{n\varphi'(n)\,dn}{\varphi(n)}}.$$

Nous allons en tirer quelques conséquences en faisant sur $V(r)$ des hypothèses particulières. Supposons V à croissance régulière, c'est-à-dire posons

$$V(r) = Ar^{\rho}(\log r)^{\rho_1}(\log_2 r)^{\rho_2}\dots(\log_k r)^{\rho_k},$$

A étant une constante.

Faisons alors le calcul précédent pour avoir $\varphi(n)$. Posons

$$\psi = rV'(r).$$

On a

$$\frac{V'(r)}{V(r)} = \frac{\rho}{r} + \frac{\rho_1}{r\log r} + \frac{\rho_2}{r\log r\log_2 r} + \dots + \frac{\rho_k}{r\log r\dots\log_k r}.$$

Donc

$$n = \psi(r) = \rho V(r)\left(1 + \frac{\frac{\rho_1}{\rho}}{\log r} + \dots + \frac{\frac{\rho_k}{\rho}}{\log r\dots\log_k r}\right).$$

En remarquant que l'expression qui suit l'unité dans la parenthèse, expression que nous désignerons par ε, tend vers 0 avec $\frac{1}{r}$, nous serons conduits pour résoudre cette équation par rapport à r, à employer une

méthode d'approximations successives. Nous avons

$$n = A\rho r^{\rho}(\log r)^{\rho_1}\ldots(\log_k r)^{\rho_k}(1+\varepsilon).$$

D'où

$$r^{\rho} = \frac{n}{A\rho}\frac{1}{(\log r)^{\rho_1}}\cdots\frac{1}{(\log_k r)^{\rho_k}}(1+\eta)$$

et en prenant les logarithmes des deux membres

$$\rho\log r = \log n - \log A\rho - \rho_1\log_2 r\ldots + \eta'$$
$$\log n(1+\varepsilon').$$

De même, on aura

$$\log\log r = \log\log n - \log\rho - \ldots = \log\log n(1+\varepsilon''),$$
$$\log_k r = \log_k n(1+\varepsilon_k).$$

Remplaçons dans l'expression de r^{ρ}, nous aurons

$$r^{\rho} = \frac{n}{A\rho}\frac{\rho^{\rho_1}}{(\log n)^{\rho_1}}\frac{1}{(\log_2 n)^{\rho_2}}\cdots\frac{1}{(\log_k n)^{\rho_k}}(1+\mu).$$

D'où la fonction $\varphi(n)$.

D'autre part, nous avons

$$r_n > \varphi(n)e^{-\frac{1}{n}\int^{n}\frac{n\varphi'(n)dn}{\varphi(n)}}.$$

Il est aisé de trouver une valeur suffisamment approchée du second facteur du deuxième membre. En effet, $\varphi(n)$ diffère peu d'une puissance de n et de plus cette fonction est à croissance régulière [1]. Or, on peut démontrer pour ces fonctions-là que, pour avoir des valeurs approchées d'une dérivée, par exemple, on pourra dériver une valeur approchée de la fonction, et cela quel que soit le sens de l'approximation, pourvu que la fonction d'approximation soit elle-même à croissance régulière. On pourra alors comparer l'intégrale ci-dessus à une intégrale de la

---

[1] Les mots *croissance régulière* sont pris ici dans leur sens le plus étroit; la fonction $V(r)$, d'où se déduit $\varphi(n)$, est composée exclusivement au moyen de fonctions à *croissance régulière simple,* tels que puissances de n, logarithmes et exponentielles de divers ordres. Par extension, on donne le nom de *fonctions à croissance régulière* à des fonctions dont la croissance peut être définie, avec une certaine approximation, au moyen des fonctions précédentes. Dans ce cas, il y a lieu de supposer, de plus, que toutes les dérivées figurant dans les applications considérées satisfont, *par hypothèse,* à la condition du texte, c'est-à-dire que leurs valeurs approchées s'obtiennent par la dérivation pure et simple de la valeur approchée de la fonction. Ceci revient à dire que les nombres tendant vers zéro, tels que le nombre μ du texte, sont aussi tels que leurs dérivées successives tendent vers zéro.

forme

$$\int_0^n \alpha\, dn = n\alpha,$$

α étant une certaine constante qu'on peut supposer voisine de $\frac{1}{\rho}$. Le second facteur est alors de la forme

$$e^{-\frac{1}{\rho}(1+\varepsilon)}$$

et l'on aura

$$r_n > \left[\frac{\rho^{\rho_1-1}}{Ae} n(\log n)^{-\rho_1}\ldots(\log_k n)^{-\rho_k}\right]^{\frac{1}{\rho}}(1+\varepsilon)$$

en remarquant que

$$e^{-\frac{1}{\rho}} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Cette expression fournit une limite minimum du module du $n^{\text{ième}}$ zéro. M. Lindelöf est allé plus loin. Il a montré que si $V(r)$ est compris entre

$$B r^{\rho}(\log r)^{\rho_1} \quad \text{et} \quad A r^{\rho}(\log r)^{\rho_1} \quad (B < A)$$

on peut en conclure des inégalités de la forme

$$[A_1 n(\log n)^{-\rho_1}]^{\frac{1}{\rho}} < r_n < [B_1 n(\log n)^{-\rho_1}]^{\frac{1}{\rho}}.$$

Sans entrer dans cette démonstration, nous nous contenterons d'appeler l'attention sur l'importance du résultat. Les inégalités précédentes résolvent d'une manière excessivement précise le problème des relations entre la croissance d'une fonction et le module de son $n^{\text{ième}}$ zéro. Ce module est, en effet, enserré entre deux limites très étroites, puisque leur rapport ne dépend que d'un certain facteur constant $\frac{B_1}{A_1}$. Il reste à approfondir deux points. D'abord la recherche effective du nombre B_1, dont M. Lindelöf se borne à démontrer l'existence; et, en second lieu, l'extension, si possible, du résultat précédent au cas où la fraction à croissance régulière a la forme plus générale d'où nous sommes partis au début.

M. Lindelöf a aussi consacré un intéressant Chapitre de son Mémoire à l'étude de l'importante question suivante :

Préciser les relations connues entre la croissance des coefficients et la croissance de la fonction (¹).

Nous ne pouvons étudier en détail cette partie de son Mémoire; pour

(¹) Voir BOREL, *Leçons sur les fonctions entières*, p. 62-70; *Leçons sur les séries à termes positifs*, p. 58-74.

donner une idée de la précision des résultats qu'il a obtenus, nous citerons le théorème suivant :

Si les coefficients d'une série entière

$$\sum c_n z^n$$

vérifient l'inégalité

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{[A_n(\log n)^{\alpha_1} \ldots (\log_\nu n)^{\alpha_\nu}]^{\frac{1}{\rho}}}$$

à partir d'un certain indice n, on aura, quelque petit que soit ε,

$$M(r) < e^{\frac{1+\varepsilon}{A e \rho^{\alpha_1+1}} r^\rho (\log r)^{-\alpha_1} \ldots (\log_\nu r)^{-\alpha_\nu}},$$

dès que r dépassera une certaine limite.

Nous voulons encore faire une remarque sur les fonctions de genre infini, dont M. Lindelöf ne s'est pas occupé. Supposons que nous ne soyons pas dans le cas exceptionnel de M. Picard. Alors il faut faire une remarque sur la distribution des zéros dans un cercle de rayon r. Presque tous les zéros sont très voisins de la périphérie, c'est-à-dire que, dans la couronne comprise entre les cercles de rayons r et $r - h$, si petit que soit h, il y a beaucoup plus de zéros que dans le reste du cercle.

Supposons donc que le nombre de zéros soit $n = \theta(r)$, θ étant une fonction croissant plus vite qu'une exponentielle. Le nombre de racines comprises entre les cercles de rayons $r - t$ et $r - t - dt$ est

$$\theta'(r - t)\,dt.$$

Dans le produit $\dfrac{r^n}{r_1 r_2 \ldots r_n}$ les facteurs qui correspondent aux zéros correspondants sont

$$\left(\frac{r}{r-t}\right)^{\theta'(r-t)\,dt}.$$

Effectuons le produit de ces expressions et posons

$$A = \prod_{t=0}^{t=h} \left(\frac{r}{r-t}\right)^{\theta'(r-t)\,dt}.$$

Nous aurons donc

$$\log A = \int_0^h \log \frac{r}{r-t}\,\theta'(r-t)\,dt.$$

Or,

$$\log\left(\frac{r}{r-t}\right) = \log\left(1 + \frac{t}{r-t}\right) = \frac{t}{r} + \frac{t^2}{r^2} + \ldots - \frac{1}{2}\left(\frac{t}{r} + \ldots\right)^2 \ldots.$$

On en déduit

$$\log A = \int_0^h \left(\frac{t}{r} + \frac{1}{2}\frac{t^2}{r^2} + \ldots\right)\theta'(r-t)\,dt.$$

Désignons la fonction $n = \theta(r)$ par $\psi''(r)$.

Intégrons par parties le premier terme de l'intégrale précédente

$$\int_0^h t\psi'''(r-t)\,dt = [-t\psi''(r-t)]_0^h + \int_0^h \psi''(r-t)\,dt$$
$$= -h\psi''(r-h) + \psi'(r) - \psi'(r-h),$$

ce qui fournit dans $\log A$ le terme $\frac{1}{r}\psi'(r)$ et des termes en $r-h$ que nous n'écrirons pas. En faisant de même pour le second terme, nous aurons

$$\int t^2\psi''(r-t)\,dt = -h^2\psi''(r-h) - 2h\psi''(r-h) + \psi(r) - \psi(r-h),$$

ce qui fournit le terme $\frac{1}{r^2}\psi(r)$ et des termes en $r-h$ et ainsi de suite.

On peut se borner à considérer le terme $\frac{1}{r}\psi'(r)$. En effet, d'abord les termes en $r-h$ sont négligeables en vertu de la remarque faite au début sur la rapidité très grande de la croissance. Quant aux termes en $\psi(r)$, $\int\psi(r)\,dr$, ..., qui s'introduiraient en continuant le calcul, ils sont négligeables, car, pour ces fonctions à croissance très rapide, la dérivée croît beaucoup plus vite que la fonction.

Nous poserons donc

$$V(r) = \frac{\psi'(r)}{r}$$

et nous aurons

$$M(r) > e^{\frac{\psi'(r)}{r}}.$$

Quant à θ ce sera

$$\theta = \frac{d}{dr}\,rV'(r) = rV'(r)(1+\varepsilon).$$

On trouve en somme ainsi que l'expression de la croissance reste la même pour une fonction de genre infini (1).

---

(1) *Voir* E. Borel, *Comptes rendus*, t. CXXXIV, et T. Levi-Civita, *Sur les fonctions de genre infini.* [Extrait d'une Lettre à M. Borel (*Bulletin des Sciences mathématiques,* novembre 1902).]

NOTE II.

SUR LE GENRE DE LA SOMME DE DEUX FONCTIONS ENTIÈRES.

L'un des résultats les plus intéressants obtenus par M. Pierre Boutroux et par M. Ernst Lindelöf, d'une manière indépendante l'un de l'autre, est relatif au *genre* de la somme de deux fonctions entières.

On se souvient que M. Poincaré avait posé, dans son Mémoire de 1883, la question de savoir si la somme de deux fonctions de genre p est toujours une fonction de genre p. La réponse affirmative paraissait d'ailleurs assez vraisemblable, *a priori*, et les travaux ultérieurs avaient paru confirmer cette présomption. Or, c'est la réponse négative qui est la vraie; il est possible de former des fonctions de genre $p-1$ dont la somme est une fonction de genre p.

Dans une Note communiquée à l'Académie des Sciences le 13 janvier 1902, M. Pierre Boutroux a précisé d'une manière très nette les circonstances dans lesquelles ce fait singulier peut se produire; il tient à ce que certaines fonctions de genre p croissent comme des fonctions de genre $p-1$ (et d'ordre p).

Si l'on écrit une fonction de genre p (privée de facteur exponentiel, pour plus de simplicité), sous la forme

$$f(z) = \prod \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{z^p}{p a_n^p}};$$

cette circonstance se présente *lorsque la série*

$$\sum \frac{1}{a_n^p} \qquad (1)$$

est convergente et a pour somme zéro, fait qui n'est nullement incompatible avec la divergence de la série

$$\sum \left| \frac{1}{a_n^p} \right|.$$

Comme le fait fort justement remarquer M. Boutroux, dans le cas où la série (1) est convergente, la fonction $f(z)$ pourrait, à un certain point de vue, être considérée comme étant de genre $p-1$. Quoi qu'il en soit de cette question de mots, le fait important est qu'une telle fonction $f(z)$ peut être la somme de deux fonctions de genre $p-1$

Cette Note a été suivie de deux autres, dans lesquelles M. Boutroux énonce des résultats fort intéressants relatifs aux zéros des fonctions entières et aussi à l'ordre des fonctions méromorphes définies par une équation différentielle.

On voit, par ce très court exposé, quelle est la profondeur et l'étendue des recherches de M. Pierre Boutroux; aussi tous nos lecteurs regretteront-ils avec nous que, son Mémoire définitif n'ayant pas encore paru, il ne nous ait pas été possible de les exposer avec tous les détails qu'elles mériteraient.

NOTE III.

SUR LA SOMME DES RÉSIDUS D'UNE FONCTION MÉROMORPHE.

Nous allons établir une formule qui a été donnée par M. Helge von Koch dans les *Comptes rendus de Stockholm* et relative à la somme des résidus des pôles d'une fonction méromorphe situés à l'intérieur d'un cercle ayant pour centre l'origine. Nous supposerons les pôles tous réels, positifs, et inférieurs à un nombre R. Soit alors

$$(1) \qquad f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_m z^m + \ldots$$

le développement taylorien de la fonction méromorphe, et

$$(2) \quad f(z) = \sum \left[\frac{A}{z-a} + \frac{A_1}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{(z-a)^n} \right] + m_0 + m_1 z + \ldots$$

le développement polaire; la série $m_0 + m_1 z + \ldots$ aura un rayon de convergence au moins égal à R.

Considérons alors l'expression suivante :

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} (-1)^\nu c_{\nu s-1} \frac{R^{\nu s}}{\nu!}.$$

Cherchons la limite de cette expression quand s croît indéfiniment.

Pour évaluer cette expression pour une valeur donnée de s, nous remarquerons qu'elle est linéaire par rapport aux coefficients de la fonction. Il suffit donc, pour l'obtenir, de faire la somme des expressions analogues relatives aux divers termes du développement. On pourra donc chercher séparément la limite pour ces différents termes.

Considérons d'abord la partie relative à la série $m_0 + m_1 z + \ldots$; on a

$$m_k < \frac{M}{R'^k},$$

M étant un nombre déterminé et R′ étant supérieur à R. Par suite

$$\left| \sum m_{\nu s-1} \frac{R^{\nu s}}{\nu!} \right| < MR' \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left(\frac{R}{R'} \right)^{\nu s}$$

$$< MR' \left[e^{\left(\frac{R}{R'}\right)^s} - 1 \right].$$

Or cette dernière expression tend vers zéro quand s croît indéfiniment. Il en est donc de même de la première.

Considérons le terme

$$\frac{A}{z-a} = -A\left(\frac{1}{a} + \frac{z}{a^2} + \ldots\right).$$

On trouve alors, pour la somme à étudier,

$$-A\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}(-1)^\nu \frac{R^{\nu s}}{a^{\nu s}}\,\frac{1}{\nu!} = -A\left[e^{-\left(\frac{R}{a}\right)^s} - 1\right],$$

expression qui tend vers A, car A est réel et positif; $\frac{R}{a}$ l'est donc aussi et, d'ailleurs, $\frac{R}{a} > 1$.

Les termes $\frac{A_1}{(z-a)^2}, \ldots$ donnent pour limite zéro. En effet on a, par exemple,

$$\frac{A_1}{(z-a)^2} = \frac{d}{da}\,\frac{A_1}{z-a}.$$

Les séries étant uniformément convergentes, on peut dériver terme à terme. La somme est donc

$$-A_1 e^{-\left(\frac{R}{a}\right)^s} s\left(\frac{R}{a}\right)^{s-1}\frac{R}{a^2}.$$

Cette expression tend vers zéro quand s croît indéfiniment.

Il en résulte que l'expression proposée a pour limite

$$A + B + \ldots + L,$$

A, B, ..., L étant les résidus relatifs aux pôles de la fonction. On a donc, et c'est la formule que nous avions en vue,

$$\lim_{s=\infty}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}(-1)^\nu c_{\nu s-1}\frac{R^{\nu s}}{\nu!} = \sum A.$$

M. Helge von Koch a généralisé cette formule et en a déduit une conséquence du plus haut intérêt : *une fonction méromorphe peut être représentée par une série de polynomes convergente dans tout le plan* (sauf aux points singuliers). On sait qu'une telle série ne peut être uniformément convergente le long d'une courbe fermée entourant les points singuliers. M. Painlevé a obtenu par une autre voie le même théorème et diverses généralisations (*Comptes rendus*, t. CXXXIV). Mais nous ne pouvons développer ici ces intéressants résultats, qui se rattachent plutôt à la théorie du prolongement analytique et des séries divergentes.

NOTE IV.

SUR LES FONCTIONS QUASI ENTIÈRES ET QUASI MÉROMORPHES.

Je voudrais résumer ici rapidement quelques-uns des plus intéressants résultats d'un important Mémoire de M. Maillet ([1]), en insistant particulièrement sur ceux qui sont en relation plus étroite avec le sujet de ces *Leçons*.

Indiquons d'abord, d'après M. Maillet, la définition des fonctions *quasi entières* et *quasi méromorphes*.

Soient $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, ..., $\psi_n(t)$ *des fonctions entières de* t *et la fonction*

$$f(z) = \psi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) + \psi_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) + \ldots + \psi_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$$

est dite une fonction quasi entière *à* n *points singuliers essentiels* ([2]) $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Si les fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, au lieu d'être supposées entières, sont supposées méromorphes, la fonction $f(z)$ sera dite *quasi méromorphe*.

On déduit aisément des théorèmes connus de Weierstrass que toute fonction quasi méromorphe est le quotient de deux fonctions quasi entières et que toute fonction quasi entière peut se mettre sous la forme

$$f(z) = \varphi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) \varphi_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) \cdots \varphi_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right),$$

où $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$ sont des fonctions entières.

M. Maillet étend aux fonctions quasi entières et quasi méromorphes un

---

([1]) *Sur les fonctions entières et quasi entières* (*Journal de M. Jordan*, 1902, fascicule IV). Je tiens à remercier M. Maillet, qui a bien voulu me communiquer les bonnes feuilles de son Mémoire, non encore paru au moment où j'écris ces lignes.

([2]) En particulier, on peut avoir $a_1 = \infty$; $\frac{1}{z-a_1}$ doit alors, comme l'on sait, être remplacé par z; si, de plus, $n = 1$, on a une fonction entière.

grand nombre de propriétés des fonctions entières et méromorphes, en particulier le théorème de M. Picard et ses généralisations (¹).

En particulier, on peut définir l'*ordre* de la fonction quasi entière ou quasi méromorphe au voisinage de chacun des points singuliers, et il y a, entre l'ordre et l'exposant de convergence de la suite des modules des zéros et des pôles (²), les mêmes relations dans le cas des fonctions entières et méromorphes.

De même la notion de croissance régulière s'étend aux fonctions quasi entières et quasi méromorphes et a les mêmes importantes conséquences dans leur théorie que dans la théorie des fonctions entières (³).

M. Maillet étend aussi aux fonctions quasi entières certaines propriétés des racines des fonctions entières, dues à Laguerre et à d'autres auteurs (⁴). Enfin, il indique des propriétés nouvelles des fonctions entières et quasi entières. L'étude détaillée de ces propriétés nous éloignerait trop de notre sujet; aussi, malgré leur intérêt, devons-nous nous contenter de signaler celles qui sont relatives à la réalité des racines et au calcul des sommes de puissances semblables des racines au moyen de formules analogues à celles de Newton.

Je tiens cependant à signaler une extension d'un important théorème de M. Hadamard, déjà généralisé dans mes *Leçons sur les fonctions entières*. Cette extension est obtenue au moyen de la *méthode d'exclusion* dont j'ai déjà, à diverses reprises, signalé l'importance dans mes *Leçons* (⁵). Le théorème obtenu par M. Maillet est le suivant :

Étant donné un produit canonique $G(z)$ *de facteurs primaires d'ordre* ρ *et un nombre positif arbitraire* ε, *si l'on décrit autour de chaque zéro un cercle de rayon* η *fini* ($\eta \leqq 1$ *arbitraire*) *en tout point extérieur à ces cercles, on a, pour* $|z|$ *assez grand, l'inégalité*

$$|G(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}.$$

(¹) Au sujet de cette extension, *voir* une Note de M. Hadamard (*Comptes rendus*, 1er juin 1896). Dans cette intéressante Note, M. Hadamard indique quelle marche on pourrait suivre pour étendre le cas particulier le plus simple du théorème de M. Picard à une fonction uniforme possédant un point singulier essentiel isolé; en suivant les indications de M. Hadamard, il serait aisé de généraliser les résultats de M. Maillet.

(²) Au voisinage du point $z = a_i$, on considère la suite des quantités $\left|\frac{1}{z_n - a_i}\right|$, qui se réduisent à $|z_n|$ lorsque l'on suppose $a_i = \infty$.

(³) *Leçons sur les fonctions entières*, Note II.

(⁴) *Leçons sur les fonctions entières*, Chap. II.

(⁵) Voir *Leçons sur la théorie des fonctions*, Chap. V; *Leçons sur les fonctions entières*, et ces *Leçons*, p. 78.

La même inégalité a lieu pour une fonction entière $f(z)$ quelconque, ρ désignant alors son ordre apparent.

Ce théorème se démontre par une méthode tout à fait semblable à celle que j'ai indiquée dans mes *Leçons sur les fonctions entières* (p. 76).

Signalons encore une conséquence intéressante qu'en déduit M. Maillet.

Soit $f(z) = A_0 + A_1 z + \ldots$ une fonction entière de genre fini et d'ordre apparent ρ'

$$f_l(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_l z^l.$$

Dès que l dépasse une certaine limite finie, à toute racine de $f_l(z)$ de module inférieur à $l^{\frac{1}{\rho'+\varepsilon}}$ correspond une racine de $f(z)$, les modules des deux racines différant d'aussi peu qu'on veut, pourvu que l soit assez grand.

Nous bornerons là cette analyse rapide du Mémoire de M. Maillet, désirant surtout l'avoir signalé et ne pouvant songer à en rendre la lecture et l'étude inutiles [1].

---

(1) J'ai connaissance, au moment où je termine la correction des épreuves, de deux Notes de M. Pringsheim, parues dans le Tome XXXII des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Munich* (p. 163-192 et 295-304). Je dois me contenter de signaler ces Notes, dans lesquelles se trouve traitée d'une manière élémentaire et simple l'étude des relations entre la croissance d'une fonction entière et la décroissance de ses coefficients.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

NOTES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

32356 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands Augustins, 55.

BOREL (**Émile**), Maître de Conférences à l'École Normale supérieure. — **Leçons sur la théorie des fonctions.** *Exposé de la Théorie des ensembles et applications.* In-8 (25-16); 1898............ 3 fr. 50 c.

DIENES (**Paul**), Privat-Docent. — **Leçons sur les Singularités des fonctions analytiques**, professées à l'Université de Budapest. In-8 (25-16) de VIII-172 pages avec 19 figures; 1913................ 5 fr. 50 c.

HALPHEN (**G.-H.**), Membre de l'Institut. — **Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications.** Trois volumes in-8 (25-16).

I[re] PARTIE : *Théorie des fonctions elliptiques et de leurs développements en série;* 1886.............................. 15 fr.

II[e] PARTIE : *Applications à la Mécanique, à la Physique, à la Géodésie, à la Géométrie et au Calcul intégral;* 1888 .... 20 fr.

III[e] PARTIE : *Fragments.* (*Quelques applications à l'Algèbre et en particulier à l'équation du 5[e] degré. Quelques applications à la théorie des nombres. Questions diverses.*) Publié par les soins de la Section de Géométrie de l'Académie des Sciences; 1891. 8 fr. 50 c.

LAURENT (**H.**), Examinateur d'admission à l'École Polytechnique. — **Traité d'Analyse.** 7 volumes in-8 (23-14), avec figures.

TOME I : **Calcul différentiel.** *Applications analytiques;* 1885. 10 fr.

TOME II : *Applications géométriques;* 1887................ 12 fr.

TOME III : **Calcul intégral.** *Intégrales définies et indéfinies;* 1888.. 12 fr.

TOME IV : *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales;* 1889.. 12 fr.

TOME V : *Équations différentielles ordinaires;* 1890........ 10 fr.

TOME VI : *Équations aux dérivées partielles;* 1890.... 8 fr. 50 c.

TOME VII ET DERNIER : *Applications géométriques de la théorie des équations différentielles;* 1891..................... 8 fr. 50 c.

MÉRAY, Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon. — **Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques.** (*Ouvrage honoré d'une souscription du Ministère de l'Instruction publique.*) Quatre volumes in-8 (25-16), se vendant séparément :

I[re] PARTIE : *Principes généraux;* 1894.................. 13 fr.

II[e] PARTIE : *Étude monographique des principales fonctions d'une variable;* 1895.. 14 fr.

III[e] PARTIE : *Questions analytiques classiques;* 1897....... 6 fr.

IV[e] PARTIE : *Applications géométriques classiques;* 1898.. 7 fr.

51054 Paris, Imp. Gauthier Villars, 55, quai des Grands-Augustins.